Лекция № 9
Гауссова функция

I Анализ Фурье

Опр-ие 1 Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, т.ч. $\int |f| < \infty$.

Преобразование Фурье ф-ии f: $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$y \longmapsto \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

Лемма 1 Свойства преобразования Фурье

1. Если $h(x) = f(T \cdot x)$, где $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ несингулярная, то
$$\hat{h}(y) = (\det T)^{-1} \hat{f}(T^{-t} \cdot y)$$

2. Если $h(x) = f(x + v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$, то
$$\hat{h}(y) = \hat{f}(y) \cdot e^{2\pi i \langle v, y \rangle}$$

3. Если $h(x) = f(x) \cdot e^{2\pi i \langle v, x \rangle}$, $v \in \mathbb{R}^n$, то
$$\hat{h}(y) = \hat{f}(y - v)$$

4. Определим $(f * g)(z) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(z - x) dx$. Тогда
$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

"вектор-строка"

$\triangleleft$ 1. $$\hat{h}(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(T \cdot x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx = \left\{ \begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x^t \cdot y = x^t \cdot T^t \cdot (T^t)^{-1} \cdot y \\ &= (T \cdot x)^t \cdot (T^{-t} \cdot y) = \langle T \cdot x, T^{-t} \cdot y \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$= \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(Tx) e^{-2\pi i \langle Tx, T^{-t} y \rangle} dx = \left\{ \begin{aligned} x' &= Tx \\ dx' &= \det T \cdot dx \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\det T} \int_{x' \in \mathbb{R}^n} f(x') \cdot e^{-2\pi i \langle x', T^{-t} y \rangle} dx'$$

$$= \frac{1}{\det T} \cdot \hat{f}(T^{-t} \cdot y).$$

2.–3. – см. упражнения.

4. $\widehat{f*g}(y) = \int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} (f*g)(z)\cdot e^{-2\pi i\langle y, z\rangle} dz = \int\limits_{\substack{z\in\mathbb{R}^n\\ x\in\mathbb{R}^n}} f(x)\cdot g(z-x)\, e^{-2\pi i\langle y, z\rangle} dz dx$

$z' = z - x$
$dz' = dz$

$$\int\limits_{\substack{z'\in\mathbb{R}^n\\ x\in\mathbb{R}^n}} f(x)\, g(z')\, \underbrace{e^{-2\pi i\langle y, z'+x\rangle}}_{e^{-2\pi i\langle y, z'\rangle}\cdot e^{-2\pi i\langle y, x\rangle}} dz dx' = \underbrace{\int\limits_{z'\in\mathbb{R}^n} g(z')\cdot e^{-2\pi i\langle y, z'\rangle} dz'}_{\hat{g}(y)} + \underbrace{\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i\langle y, x\rangle} dx}_{\hat{f}(y)}$$

$= \hat{g}(y)\cdot\hat{f}(y).$ ▶

Лемма 2 (свойства преобразования Фурье. ч.2)

1. $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$

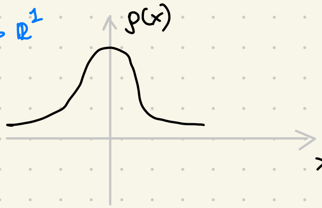
$\hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}(x) = f(x)$

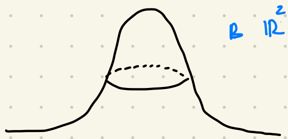
(док-во в упр-иях)

2. $p(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ – Гауссова функция

$\hat{p}(x) = p(x)$ (Гауссова ф-ия - это айгенфункция преобр-ия Фурье)

в $\mathbb{R}^1$





в $\mathbb{R}^2$

◁ 2. $\hat{p}(y) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)\, e^{-2\pi i\langle x, y\rangle} dx = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2 - 2\pi i\langle x, y\rangle} dx =$

$= \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2 - 2\pi i\langle x, y\rangle - i^2\pi\|x\|^2 + i^2\pi\|x\|^2} dx = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi\underbrace{(\|x\|^2 + 2\pi i\langle x, y\rangle + i^2\|x\|^2)} + i^2\pi\|y\|^2} dx$

$e^{-\pi\|y\|^2} \underbrace{\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\|x\| + i\|y\|)^2} dx}_{\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}} = e^{-\pi\|y\|^2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = e^{-\pi\|y\|^2}$ ▶

Теорема (Формула сложения Пуассона / PSF)

Для $\forall$ достаточно "хорошей" ф-ии f (т.е. $\int_0^1 f\,dx\ \exists$), справедливо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)$$

(или $f(\mathbb{Z}^n) = \hat{f}(\mathbb{Z}^n)$.

$\triangleleft$ Обозначим $\varphi(x) := f(x+\mathbb{Z}^n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)$ для $x\in\mathbb{R}^n$

$\uparrow$

ф-ия с периодом 1 $\left(\begin{array}{l}\varphi(x) = \varphi(x+\mathbb{Z}^n)\\ \quad\ \ = \varphi(x+(1..1))\end{array}\right)$, т.е. если $x\in\mathbb{Z}^n$, значения $\varphi(x)$ совпадают. $\Rightarrow \exists\ \varphi(x)$ для $x\in[0,1)^n$

Преобразование Фурье для $\mathbb{Z}^n$-периодичной ф-ии есть

$$\hat{\varphi}(z) : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \int_{x\in[0,1)^n} \varphi(x)\, e^{-2\pi i\langle x, z\rangle}\, dx$$

и, кроме этого, справедливо

$$\varphi(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(z)\, e^{-2\pi i\langle x, z\rangle}$$ – разложение по базису Фурье

$$f(\mathbb{Z}^n) = \varphi(0) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(z)\cdot \underbrace{e^{-2\pi i \overbrace{\langle z, 0\rangle}^{0}}}_{1} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(z) = \hat{\varphi}(\mathbb{Z}^n)$$

для $z\in\mathbb{Z}^n$: $$\hat{\varphi}(z) = \int_{x\in[0,1)^n} \varphi(x)\, e^{-2\pi i\langle x, z\rangle}\, dx = \int_{x\in[0,1)^n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)\Big) e^{-2\pi i\langle x, z\rangle}\, dx$$

$$\overset{e^{2\pi i\cdot\mathbb{Z}}=1}{=} \underbrace{\int_{x\in[0,1)^n} \int_{k\in\mathbb{Z}^n}}_{\substack{x+k=:x',\ x'\in\mathbb{R}^n\\ dx=dx'}} f(x+k)\cdot e^{-2\pi i\langle x+k, z\rangle}\, dx = \int_{x'\in\mathbb{R}^n} f(x')\, e^{-2\pi i\langle x', z\rangle}\, dx' =$$

$$= \hat{f}(z) \Rightarrow f(\mathbb{Z}^n) = \hat{\varphi}(\mathbb{Z}^n) = \hat{f}(\mathbb{Z}^n)\ \blacktriangleright$$

Следствие $\forall$ решётки L и "хорошей" f:

$$f(L) = \det(\hat{L})\cdot \hat{f}(\hat{L})$$
$$\sum_{x\in L} f(x) = \det(\hat{L})\cdot \sum_{\hat{x}\in\hat{L}} \hat{f}(\hat{x})$$, где $\hat{L}$ – дуальная к L.

В общем случае, $\forall u\in\mathbb{R}^n$ $$f(L+u) = \det(\hat{L})\cdot \sum_{\hat{x}\in\hat{L}} \hat{f}(\hat{x})\cdot e^{2\pi i\langle x, u\rangle}$$

II Гауссового распределение на решётке

$\rho(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ задаёт вероятностное распределение на $\mathbb{R}^n$ $\quad \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$

Цель: $\rho(x)$ на $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow D(b) \approx e^{-\pi\|x\|^2}$, $b \in L$, L-решётка

Кандидат: $D(b) = \dfrac{e^{-\pi\|b\|^2}}{\rho(L)}$, $\quad \rho(L) = \sum\limits_{v\in L} e^{-\pi\|v\|^2}$

Покажем, что $\rho(L)$ конечна

Лемма $\forall$ решётки L р-ти n, $\rho(L) = \sum\limits_{v\in L} e^{-\pi\|v\|^2} < +\infty$.

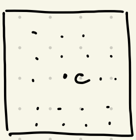
Более того, $\forall c\in\mathbb{R}^n$ $\rho(L-c) < +\infty$.

◁ Покажем для $L = \mathbb{Z}^n$ ($\forall$ другой решётки $\exists$ коэфф-ты её векторов относительно произвольного базиса, делаем замену переменных).

$$\forall c\in\mathbb{R}^n \quad \sum_{v\in L} e^{-\pi\|v-c\|^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\substack{v\in L \\ k-1\le\|v-c\|<k}} e^{-\pi\|v-c\|^2} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\substack{v\in L \\ k-1\le\|v-c\|<k}} e^{-\pi(k-1)^2} \le$$

$k-1 \le \|v-c\|_2 < k$
$\Rightarrow \|v-c\|_\infty < k$
$\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$

$2k-1$



← всевозможные $v\in L$ для фикс. k $\Rightarrow$ их число может быть ограничено объёмом куба $\le (2k+1)^n$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (2k+1)^n \cdot e^{-\pi(k-1)^2} \le 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \underbrace{(2k+1)^n e^{-\pi k^2}} < +\infty. \quad ▶$$

$e^{-\pi k^2}$ убывает быстрее, чем $(2k+1)^n$

Определение Гауссово распределение на решётке L с пар-ми $c\in\mathbb{R}^n$ и $s>0$ задаётся

$$D_{L,s,c}(b) = \frac{\rho_{s,c}(b)}{\rho_{s,c}(L)} = \frac{e^{-\frac{\pi\|b-c\|^2}{s^2}}}{\sum\limits_{v\in L} e^{-\frac{\pi\|v-c\|^2}{s^2}}}.$$

s — среднекв. отклонение, c — сдвиг

Лемма (св-ва $D_{L,s,c}$)

1) $\forall L,\ \forall k \geq 1:\ \rho(L/k) \leq k^n \rho(L)$

2) $\forall L,\ \forall c \in \mathbb{R}^n:\ \rho(L+c) \leq \rho(L)$

$\Big\}$ 3) $\rho_s(L+c) \leq s^n \rho(L)$

4) "Tail bound" $\forall L,\ \forall c \in \mathbb{R}^n,\ \forall d>0$

Граница хвоста

$$\frac{\rho\left(L+c \setminus B^{(n)}\left(0,\ d\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\right)\right)}{\rho(L+c)} \leq \left(\frac{d^2}{e^{d^2-1}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

для $c=0$, $s=1$ это св-во переписывается

$$\Pr\left[b \leftarrow D_{L,1,0} : \|b\| \geq d\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\right] \leq \left(\frac{d^2}{e^{d^2-1}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

◁ 1. $\rho(L/k) \overset{PSF}{=} \det(\widehat{L/k})\cdot\hat{\rho}(\widehat{L/k}) \overset{\widehat{L/k}=k\cdot\hat{L}}{=\!=} \det(k\cdot\hat{L})\cdot\rho(k\cdot\hat{L})$

$$= k^n\cdot\det(L)\cdot\rho(k\cdot\hat{L}) \underset{\rho(1\cdot L)\geq\rho(k\cdot L)\text{ для } k\geq 1}{\leq} k^n\det(L)\cdot\rho(\hat{L}) \overset{PSF}{=} k^n\cdot\underbrace{\det(L)\cdot\det(\hat{L})}_{1}\cdot\rho(L) = k^n\cdot\rho(L).$$

2. $\rho(L+c) \overset{PSF}{=} \det(\hat{L})\cdot\sum\limits_{\hat{b}\in\hat{L}}\underbrace{\hat{\rho}(\hat{b})}_{\rho(\hat{b})}\cdot e^{2\pi i\langle\hat{b},c\rangle} = \det(\hat{L})\left|\sum\limits_{\hat{b}\in\hat{L}}\hat{\rho}(\hat{b})e^{2\pi i\langle\hat{b},c\rangle}\right|$, где $\underbrace{\hat{\rho}(\hat{b})\cdot e^{2\pi i\langle\hat{b},c\rangle}}_{\in\mathbb{R}^+}$

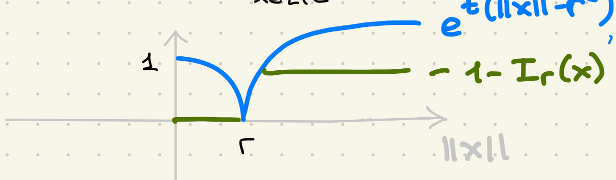
$$\overset{\text{н-во Δ-ка}}{\leq} \det(\hat{L})\sum_{\hat{b}\in\hat{L}}\hat{\rho}(\hat{b}) \overset{PSF}{=} \rho(L).$$

4. Положим, $I_r(x)$ – индикатор $\underbrace{B^{(n)}(r)}_{\text{с центром в } 0}$, т.е. $I_r(x) = \begin{cases} 1, & x\in B^{(n)}(r) \\ 0, & x\notin B^{(n)}(r)\end{cases}$

$r := d\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$

$$\rho(L+c\setminus B^{(n)}(r)) = \sum_{x\in L+c}\rho(x)\left[1-I_r(x)\right] \leq \sum_{x\in L+c}\rho(x)\frac{e^{t\|x\|^2}}{e^{tr^2}} \;(=)$$

$\forall t\in(0,\pi)$



$$= e^{-tr^2}\sum_{x\in L+c}e^{-\pi\|x\|^2}\cdot e^{t\|x\|^2} = e^{-tr^2}\sum_{x\in L+c}e^{\|x\|^2(-\pi+t)} = e^{-tr^2}\sum_{x\in L+c}\underbrace{e^{\|x\|^2\left(-\pi\left(\sqrt{1-\frac{t}{\pi}}\right)^2\right)}}_{\rho_{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{\pi}}}}(x)}$$

$$= e^{-tr^2}\rho_{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{\pi}}}}(L+c) \overset{\text{св-во 2}}{\leq} e^{-tr^2}\rho_{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{\pi}}}}(L).$$ для $t = \pi - \frac{n}{2r^2}$ получаем

утверждение леммы. ▶

Замечание для $d = 1.93 < \sqrt{2\pi}$: правая сторона н-ва $\leq 2^{-n}$.