Алгебраическая теория чисел
БФУ им. И.Канта – Малыгина Е.С.

Лекция №4

2 Вложения числового поля

2.1 Гомоморфизмы полей

Лемма 1. *Любой гомоморфизм полей $\sigma : K \to L$ инъективен.*

Замечание 1. Если $\sigma : K \to L$ – гомоморфизм полей, то будем считать, что $\sigma : K \hookrightarrow L$.

Рассмотрим
$$f(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in K[X],$$
тогда
$$\sigma(f(X)) = \sigma(a_n)X^n + ... + \sigma(a_1)X + \sigma(a_0) \in L[X].$$

Лемма 2. *Пусть $\sigma : K \to L$ – изоморфизм числовых полей, $\alpha \in \mathbb{C}$ – корень $f \in K[X]$, неприводимого над K, $\beta \in \mathbb{C}$ – корень $\sigma(f)$. Тогда существует единственный изоморфизм $\tau : K(\alpha) \to L(\beta)$, такой, что $\tau|_K = \sigma$ и $\tau(\alpha) = \beta$.*

Пример 1. Пусть $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $d \neq 0, 1$ – свободно от квадратов и $f(X) = X^2 - d$. Имеем $id(f) = f$.
Пусть $\alpha = \sqrt{d}$ и $\beta = -\sqrt{d}$. Тогда $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, следовательно, существует единственный гомоморфизм $\tau : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, такой, что $\tau|_{\mathbb{Q}} = id$ и $\tau(\alpha) = \beta$. Тогда $\tau(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

2.2 Вложения в $\mathbb{C}$

Определение 1. Пусть K – числовое поле. Вложением K называется гомоморфизм $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Лемма 3. *Пусть $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ – вложение. Тогда $\sigma(a) = a$ для $\forall a \in \mathbb{Q}$.*

Пример 2. Пусть $d \neq 0; 1$ – свободно от квадратов, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $a + b\sqrt{d} \in K$. Если $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ – вложение, то
$$\sigma(a + b\sqrt{d}) = \sigma(a) + \sigma(b)\sigma(\sqrt{d}) = a + b\sigma(\sqrt{d}).$$

Поскольку $(\sqrt{d})^2 = d \in \mathbb{Q}$, то $\Rightarrow \sigma((\sqrt{d})^2) = (\sigma(\sqrt{d}))^2 = \sigma(\sqrt{d}) = d$. Следовательно, $\sigma(\sqrt{d}) = \pm\sqrt{d}$.
Таким образом, существуют 2 вложения $\sigma_1, \sigma_2 : K \hookrightarrow \mathbb{C}$:

$$\sigma_1(a + b\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d}, \quad \sigma_2(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}.$$

Лемма 4. *Пусть K – числовое поле, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}, f \in K[X]$ – неприводимый нал K и $degf = d$. Тогда $\sigma(f)$ имеет d различных корней в $\mathbb{C}$.*

2.3 Теорема о примитивном элементе

Теорема 1. *Пусть L/K – расширение числовых полей. Тогда $L = K(\gamma)$ для некоторого $\gamma \in L$.*

Лемма 5. *Пусть $L = K(\alpha, \beta)$ – числовое поле. Тогда существует элемент $\gamma \in L$, такой, что $L = K(\gamma)$.*

2.4 Расширенные вложения

Определение 2. Пусть L/K – расширение числовых полей, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\tau : L \hookrightarrow \mathbb{C}$. Говорят, что τ расширяет σ, если $\tau|_K = \sigma$.

Теорема 2. *Пусть K – числовое поле, $M = K(\alpha)$, α – алгебраический над K, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Пусть также μ_α – минимальный многочлен α над K и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корни $\sigma(\mu_\alpha)$ в $\mathbb{C}$. Тогда*

1. *Существует ровно $n = [M : K]$ вложений $\tau_i : M \hookrightarrow \mathbb{C}$, расширяющих σ.*

2. *$\tau_i(\alpha) = \alpha_i$.*

Пример 3. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Найдем вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Обозначим $\theta = \sqrt[3]{2}$. Тогда $K = \{a + b\theta + c\theta^2 | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
Если $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, то существует $id : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$, такое, что $id(a) = a$ для $\forall a \in \mathbb{Q}$.
Имеем $\mu_\theta(X) = X^3 - 2$, тогда $\theta, \zeta\theta, \zeta^2\theta$ – комплексные корни μ_θ, где $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
При этом $\tau|_\mathbb{Q} = id$.
Таким образом, для $i = \overline{1,3}$, $\tau_i : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\tau_1(\theta) = \theta$, $\tau_2(\theta) = \zeta\theta$, $\tau_3(\theta) = \zeta^2\theta$.

Теорема 3. *Числовое поле K имеет $[K : Q]$ вложений.*