Алгебраическая теория чисел
БФУ им. И.Канта – Малыгина Е.С.

Лекция №5

2 Вложения числового поля

2.6 Действительные и комплексные вложения

Рассмотрим $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\overline{\sigma} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, где $\overline{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)}$. Имеем $\sigma = \overline{\sigma}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$ (нет мнимой части) $\Rightarrow \sigma$ – действительное вложение. Если же $\sigma(K) \not\subset \mathbb{R} \Rightarrow \sigma$ – комплексное вложение.

Теорема 1. *Пусть K – числовое поле, $\sigma_1, ..., \sigma_r$ – его действительные вложения; $\sigma_{r+1}, ..., \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+1}}, ..., \overline{\sigma_{r+s}}$ – комплексные вложения. Тогда*

$$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s.$$

При этом пара (r, s) называется подписью K.

Пример 1. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$. Найдём (r, s).
$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \mu_\alpha = X^4 - 2X - 1 \Rightarrow [K : \mathbb{Q}] = 4$.
$\alpha_1 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \alpha_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \alpha_3 = \sqrt{1 - \sqrt{2}}, \alpha_4 = -\sqrt{1 - \sqrt{2}}$.
Обозначим $\tau_i : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\tau_i(\alpha) = \alpha_i$. Пусть тогда α_1, α_2 – действительные корни, а α_3, α_4 – комплексные.
Окончательно имеем: $r = 2, s = 1 \Rightarrow (r, s) = (2, 1) \Rightarrow [K : \mathbb{Q}] = r + rs = 2 + 2 \cdot 1 = 4$.

Определение 1. Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Сопряжениями к α называются корни его минимального многочлена μ_α.

Теорема 2. *Пусть K – числовое поле степени n, $\sigma_1, ..., \sigma_n$ – вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\alpha \in K$. Также пусть задан характеристический многочлен $\chi_\alpha(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \sigma_i(\alpha))$. Тогда*

$$Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha), \quad N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha).$$

Пример 2. 1. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$. Тогда существуют 3 вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}$:

- $\sigma_1(\alpha) = \alpha$;

- $\sigma_2(\alpha) = \sqrt[3]{2}\zeta$;
- $\sigma_3(\alpha) = \sqrt[3]{2}\zeta^2$.

Согласно теореме $Tr(\alpha) = 3$, $N(\alpha) = 3$.

2. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}), \alpha = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Тогда $\chi_\alpha(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - b^d) \in \mathbb{Q}[X]$.
Если $b = 0$, то $\alpha = a \in \mathbb{Q}$ и $\chi_\alpha(X) = X^2 - 2aX + a^2 = (X-a)^2 = \mu_\alpha$.
Если $a, b \neq 0$, то $\chi_\alpha = \mu_\alpha$.

2.7 Дискриминанты

Пусть K – числовое поле степени n. Рассмотрим $\omega_1, ..., \omega_n \in K$. Обозначим

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \sigma_2(\omega_1) & ... & \sigma_n(\omega_1) \\ \sigma_1(\omega_2) & \sigma_2(\omega_2) & ... & \sigma_2(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(\omega_n) & \sigma_2(\omega_n) & ... & \sigma_n(\omega_n) \end{pmatrix}$$

$D(\omega_1, ..., \omega_n) = \det(M)$ называется определителем набора $\omega_1, ..., \omega_n$.
$\Delta(\omega_1, ..., \omega_n) = D^2(\omega_1, ..., \omega_n)$ называется дискриминантом набора $\omega_1, ..., \omega_n$.

Пример 3. 1. Рассмотрим $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, тогда $\{1, \sqrt{d}\}$ – базис $K/\mathbb{Q}$.
Существуют вложения: $\sigma_1(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$, $\sigma_2(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$.
Определитель матрицы вложений в таком случае равен:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{d} & -\sqrt{d} \end{vmatrix} = 4d.$$

2. В случае, если $\{\omega_1, \omega_2\} = \{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$, где $\omega_1, \omega_2 \in K$, то $\Delta(\omega_1, \omega_2) = d$.

3. Рассмотрмм $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$. Тогда $\{1, \sqrt[3]{d}, (\sqrt[3]{d})^2\}$ – базис $K/\mathbb{Q}$.
Обозначим $\theta = \sqrt[3]{d}$. Тогда существуют вложения: $\sigma_1(\theta) = \theta$, $\sigma_2(\theta) = \theta \cdot \zeta$, $\sigma_2(\theta) = \theta \cdot \zeta^2$ и

$$\Delta(1, \theta, \theta^2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & \theta\zeta & \theta\zeta^2 \\ \theta^2 & \theta^2\zeta^2 & \theta^2\zeta \end{vmatrix}^2 = (3\theta^3\zeta^2 - 3\theta^3\zeta)^2 = (3d(\zeta^2 - \zeta))^2 = -27d^2.$$

2.8 Дискриминант и следы

Теорема 3. *Пусть K – числовое поле степени n, $\omega_1, ..., \omega_n \in K$. Тогда $\Delta(\omega_1, ..., \omega_n) = det(M)$, где $M = (Tr_{K/\mathbb{Q}}(\omega_i\omega_j))$.*

Пример 4.

$$\Delta(1; \theta; \theta^2) = \begin{vmatrix} Tr(1 \cdot 1) & Tr(1 \cdot \theta) & Tr(1 \cdot \theta^2) \\ Tr(\theta \cdot 1) & Tr(\theta \cdot \theta) & Tr(\theta \cdot \theta^2) \\ Tr(\theta^2 \cdot 1) & Tr(\theta^2 \cdot \theta) & Tr(\theta^2 \cdot \theta^2) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3d \\ 0 & 3d & 0 \end{vmatrix}^2 = -27d^2.$$