Практика №3 (15.09.20)

1. Введение в теорию групп.

1.3. Циклические группы.

1.3.1. Свойства циклических групп. 1.3.2. Классификация подгрупп циклических групп.

1. Пусть $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ и $\langle c\rangle$ – циклические группы порядков 6, 8 и 20 соответственно. Найти все образующие каждой подгруппы.

2. Записать поэлементно подгруппы $\langle 3\rangle$ и $\langle 7\rangle$ в $U(20)$.

3. Пусть a – элемент группы G и $\mathrm{ord}(a) = 15$. Вычислить порядки следующих элементов группы G:

1. $a^3, a^6, a^9, a^12;$
2. $a^5, a^10;$
3. $a^2, a^4, a^8, a^14.$

4. Пусть G – группа и $a \in G$. Доказать, что $\langle a^{-1}\rangle = \langle a^{-1}\rangle$.

5. В $\mathbb{Z}_{24}$ найти образующую для $\langle 21\rangle \cap \langle 10\rangle$. Предположим, что $\mathrm{ord}(a) = 24$. найти образующую для $\langle a^{21}\rangle \cap \langle a^{10}\rangle$. В общем случае, что является образующей для подгруппы $\langle a^m\rangle \cap \langle a^n\rangle$.

6. Пусть G – абелева группа и $H = \{g \in G|\mathrm{ord}(g)|12\}$. Доказать, что H – подгруппа в G.

7. Пусть a – элемент группы G.

1. Если $a^{12} = e$, что можно сказать о порядке элемента a?
2. Если $a^m = e$, что можно сказать о порядке элемента a?
3. Пусть $|G| = 24$ и G – циклическая. Если $a^8 \neq e$ и $a^{12} \neq e$, показать, что $\langle a\rangle = G$.

8. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. Найти образующую для подгруппы $\langle m\rangle \cap \langle n\rangle$.