
Практика №5 (06.10.20; 13.10.20)

---

1. Введение в теорию групп.

1.5. Изоморфизмы.

1.5.1. Определения и примеры. 1.5.2. Теорема Кэли. 1.5.3. Свойства изоморфизмов. 1.5.4. Автоморфизмы.

1. Найти $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

2. Показать, что $U(8) \ncong U(10)$.

3. Показать, что отображение $a \mapsto \log_{10} a$ является изоморфизмом, действующим из $\mathbb{R}^{>0}$ относительно умножения в $\mathbb{R}$ относительно сложения.

4. Пусть G – группа. Доказать, что отображение $\varphi(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда G – абелева.

5. Найти $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_6)$.

6. Доказать, что отображение $U(16) \to U(16)$, $x \mapsto x^3$ является автоморфизмом. Что можно сказать об отображениях $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^7$?

7. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_{50}$ – автоморфизм, такой, что $\varphi(11) = 13$. Определить формулу для $\varphi(x)$.

8. Доказать, что отображение $\varphi(a + bi) = a - bi$ является автоморфизмом группы комплексных чисел относительно сложения.

9. Пусть G – конечная абелева группа и G не имеет элемнтов порядка 2. Доказать, что отображение $g \mapsto g^2$ задает автоморфизм группы G.

10. Пусть $a \in G$ и $\mathrm{ord}(a) < \infty$. Пусть φ_a – автоморфизм группы G, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Показать, что $\mathrm{ord}(a)|\mathrm{ord}(\varphi_a)$.