

Практика №7 (27.10.20)

---

**1. Введение в теорию групп.**

**1.7. Внешнее прямое произведение.**

**1.7.1. Основные определения и примеры. 1.7.2. Свойства внешнего прямого произведения. 1.7.3. Группа единиц по модулю  $n$  как внешнее прямое произведение.**

1. Доказать, что внешнее прямое произведение любого конечного числа групп является группой.
2. Показать, что  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  имеет семь подгрупп порядка 2.
3. Пусть  $G$  – группа с тождественным элементом  $e_G$ ,  $H$  – группа с тождественным элементом  $e_H$ . Доказать, что  $G \cong G \oplus \{e_H\}$  и  $H \cong \{e_G\} \oplus H$ .
4. Является ли  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  циклической группой?
5. Сравнением порядков элементов доказать, что  $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ .
6. Как много элементов порядка 9 имеет  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9$ ?
7. Доказать, что группа комплексных чисел относительно сложения изоморфна  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .
8. Если  $G \oplus H$  – циклическая, то доказать, что  $G$  и  $H$  – циклические.
9. В  $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{30}$  найти две подгруппы порядка 12.
10. Найти подгруппу  $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$ , изоморфную  $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_4$ .