

Практика №8 (10.11.20)

---

1. Введение в теорию групп.

1.8. Нормальные подгруппы и фактор-группы.

1.8.1. Нормальные подгруппы. 1.8.2. Фактор-группы. 1.8.3. Приложения фактор-групп. 1.8.4. Внутреннее прямое произведение.

1. Пусть  $G = GL_2(\mathbb{R})$  и  $K$  – подгруппа мультипликативной группы  $\mathbb{R}^\times$ . Доказать, что  $H = \{A \in G \mid \det A \in K\}$  – нормальная подгруппа в  $G$ .

2. Рассмотрим  $\langle 3 \rangle$  и  $\langle 12 \rangle$  как подгруппы  $\mathbb{Z}$ . Доказать, что  $\langle 3 \rangle / \langle 12 \rangle$  изоморфна  $\mathbb{Z}_4$ .

3. Доказать, что если  $H$  имеет индекс 2 в группе  $G$ , то  $H \triangleleft G$ .

4. Показать, что  $H = \{(1), (12)(34)\}$  – нормальная в  $A_4$ .

5. Пусть  $G = \mathbb{Z}_4 \oplus U(4)$ ,  $H = \langle (2, 3) \rangle$  и  $K = \langle (2, 1) \rangle$ . Показать, что  $G/H \not\cong G/K$ .

6. Доказать:

- фактор-группа циклической группы является циклической;
- фактор-группа абелевой группы является абелевой.

7. Найти порядок элемента  $14 + \langle 8 \rangle$  в фактор-группе  $\mathbb{Z}_{24} / \langle 8 \rangle$ .

8. Пусть  $G = \mathbb{Z} / \langle 20 \rangle$  и  $H = \langle 4 \rangle / \langle 20 \rangle$ . Найти элементы  $H$  и  $G/H$ .

9. Найти порядок фактор-группы  $\mathbb{Z}_{10} \oplus U(10) / \langle (2, 9) \rangle$ .

10. Пусть  $H = \langle 5 \rangle$  и  $K = \langle 7 \rangle$  – подгруппы в  $\mathbb{Z}$ . Что есть  $H \times K$ ?