Лекция №1 (21.01.21)

2 Введение в теорию колец

2.1 Основные определения

Определение 1. *Кольцом R называется множество элементов с двумя бинарными операциями, такими, что*

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность);*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность);*
3. $\exists$ *нейтральный элемент относительно сложения:*

$$a + 0 = 0 + a = a, \ \ \forall a \in R;$$

4. $\exists$ *противоположный отностильно сложения:*

$$-a \in R, \ \ \textit{причем} \ \ (-a) + a = a + (-a) = 0;$$

5. $a(bc) = (ab)c$ *(ассоциативность);*
6. $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ *(дистрибутивность).*

Теорема 1 (Простейшие свойства)**.** *Пусть R – кольцо и $a, b, c \in R$. Тогда*

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$*;*
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$*;*
3. $(-a)(-b) = ab$*;*
4. $a(b - c) = ab - ac$, $(b - c)a = ba - ca$.

Кроме того, если R имеет единичный элемент 1 относительно умножения, то

5. $(-1)a = -a$*:*
6. $(-1)(-1) = 1$.

Теорема 2. *Если кольцо имеет единичный элемент, то этот элемент единственен. Если для $a \in R$ существует a^{-1}, то a^{-1} единственен.*

Определение 2. *Подмножество S кольца R называется подкольцом в R, если само является кольцом относительно операций, заданных в R.*

Теорема 3 (Признак подкольца)**.** *Непустое подмножество S кольца R является подкольцом, если* $\left.\begin{matrix} a-b \\ ab \end{matrix}\right\} \in R$ *для* $\forall a, b \in S$.

2.2 Кольца целостности

Определение 3. *Пусть R – коммутативное кольцо. Элемент $0 \neq a \in R$ называется делителем нуля, если существует $0 \neq b \in R$ и $ab = 0$.*

Определение 4. *Кольцом целостности называется коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.*

Теорема 4. *Пусть R – кольцо целостности, $a, b, c \in R$. Если $a \neq 0$ и $ab = ac$, то $b = c$.*

Определение 5. *Полем называется коммутативное кольцо с единицей, в котором любой отличный от нуля элемент обратим.*

Теорема 5. *Конечное кольцо целостности является полем.*

Следствие 1. *Для любого простого p кольцо $\mathbb{Z}_p$ является полем.*

Определение 6. *Характеристикаой кольца R называется наименьшее положительное целое n, такое, что $n \cdot x = 0$ для всех $x \in R$. Если такого n не существует, то будем говорить, что R имеет характеристику 0. Обозначается $\mathrm{char} R = n$.*

Теорема 6. *Пусть R – кольцо с единицей. Если единица имеет бесконечный порядок относительно сложения, то $\mathrm{char} R = 0$. Если единица имеет порядок n относительно сложения, то $\mathrm{char} R = n$.*

Теорема 7. *Если R – кольцо целостности, то* $\mathrm{char} R = \left[\begin{array}{l} 0, \\ p \text{ – простое.} \end{array}\right.$