Лекция №1 (28.01.21, 04.02.21)

2 Введение в теорию колец

2.3 Идеалы и фактор-кольца

Определение 1. *Полькольцо A кольца R называется идеалом кольца R, если для $\forall r \in R$ и $\forall a \in A$ имеет место $ra, ar \in A$.*
Идеал A в R называется собственным идеалом кольца R, если $A \subsetneq R$.

Пусть R – кольцо, тогда R – аддитивная группа. Мы можем рассматривать идеал A в R как нормальную подгруппу в R. Запишем $R/A = \{r + A | r \in R\}$.

Теорема 1. *Пусть R – кольцо, A – полькольцо в R. Множество классов $\{r + A | r \in R\}$ – кольцо относительно операций:*

$$\begin{matrix} (s+A)+(t+A) = s+t+A \\ (s+A)\cdot(t+A) = st+A \end{matrix} \Leftrightarrow A \text{ – идеал в } R.$$

Определение 2. *Простым идеалом A коммутативного кольца R называется собственный идеал в R, такой, что для $a, b \in R$ и $ab \in A \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A, \\ b \in A. \end{array} \right.$*

Определение 3. *Максимальным идеалом A коммутативного кольца R называется собственный идеал в R, такой, что не существует идеала B в R, такого, что $A \subsetneq B \subsetneq R$.*

Теорема 2. *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, A – идеал в R. R/A – кольцо целостности тогда и только тогда, когда A – простой идеал.*

Теорема 3. *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, A – идеал в R. R/A – поле тогда и только тогда, когда A – максимальный идеал.*