Лекция №1 (01.09.20)

1. Введение в теорию групп.

1.1. Группы.

1.1.1. Основные определения и примеры.

Определение 1. *Пусть G – множество вместе с некоторой бинарной операцией (по умолчанию будем полагать, что это умножение). Будем говорить, что G –* группа *относительно указанной операции, если выполняются следующие свойства:*

1. *(Ассоциативность): $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in G$.*
2. *(Нейтральный или тождественный элемент): Существует $e \in G$, такой, что $ae = ea = a$ для всех $a \in G$.*
3. *(Обратимость): Для каждого элемента $a \in G$ существует $b \in G$, такой, что $ab = ba = e$.*

Если для всяких $a, b \in G$ выполняется условие $ab = ba$, то группа G называется *абелевой.*

Пример 1.

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *– группы относительно сложения.*
- $\mathbb{Z}$ *не является группой относительно умножения.*
- $\{1, -1, i, -i\}$ *– группа относительно комплексного умножения.*
- $\mathbb{Q}^+$ *– положительные рациональные числа – группа относительно умножения.*
- *Множество положительных иррациональных чисел вместе с 1 относительно умножения удовлетворяет трём свойствам определения, однако $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Следовательно, данное множество не является замкнутым относительно умножения.*

- *Множество матриц вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *где* $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, *образует группу относительно покомпонентного сложения.*

- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *при* $n \geq 1$ *– группа относительно сложения по модулю* n.

- $\mathbb{R}^{\times}$ *– множество действительных ненулевых чисел – группа относительно умножения.*

- *Множество матриц вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *где* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *и* $ad - bc \neq 0$, *является неабелевой группой относительно матричного умножения.*

- $\{0, 1, 2, 3\}$ *не является группой относительно умножения по модулю* 4.

- $\left\{\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{n} | k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}$ *– множество косплексных корней степени* n *из единицы – группа относительно умножения.*

- $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ *– группа относительно покомпонентного сложения.*

- *Зафиксируем точку* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *определим отображение* $\phi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$. *Тогда* $\{\phi_{a,b} | a, b \in \mathbb{R}\}$ *– группа относительно композиции функций.*

- $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ *– группа относительно умножения по модулю* n *тогда и только тогда, когда* n *– простое.*

1.1.2. Элементарные свойства групп.

Теорема 1. *В группе* G *тождественный (нейтральный) элемент является единственным.*

Теорема 2. *Для* $a, b, c \in G$ *выполняется* $ba = ca \Rightarrow b = c$, $ab = ac \Rightarrow b = c$.

Теорема 3. *Для каждого элемента* $a \in G$ *существует единственный элемент* $b \in G$, *такой, что* $ab = ba = e$.

Теорема 4. *Для элементов* $a, b \in G$ *имеет место* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.