Лекция №2 (08.09.20)

1.2 Конечные группы. Подгруппы.

1.2.1 Основные определения и обозначения.

Определение 1. *Число элементов в группе G называется ее порядком и обозначается $|G|$.*

Определение 2. *Порядком элемента g группы G называется наименьшее положительное целое n, такое, что $g^n = e$, где e – нейтральный элемент относительно операции в G. Обозначается $\operatorname{ord} g$ или $|g|$.*

Определение 3. *Подмножество H группы G, являющееся группой относительно операции в G, называется подгруппой в G. При этом пишут $H \subseteq G$.*

Простейшими примерами подгрупп являются $\{e\}, G$ – тривиальные подгруппы в G.

1.2.2 Признаки подгруппы.

Теорема 1. *Пусть G – группа, $H \subset G$ – непустое множество. Если $ab^{-1} \in H (a, b \in H)$, то H – подгруппа в G.*

Теорема 2. *Пусть G – группа, $H \subset G$ – непустое множество. Для $a, b \in H$, если*
1) $ab \in H$,
2) $a^{-1} \in H$,
то H – подгруппа в G.

Теорема 3. *Пусть G – группа, $H \subset G$ – непустое множество. Если H замкнуто относительно операции в G, то H – подгруппа в G.(Только для конечных G и H).*

1.2.3 Примеры подгрупп.

Обозначим $< a >= \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, где a – элемент группы G.

Теорема 4. *Пусть G – группа, a – элемент этой группы. Тогда $< a >$ – подгруппа в G.*

Группа $< a >$ называется *циклической* подгруппой в G, порожденной элементом a.

Определение 4. *Центром группы G называется подмножество элементов G, коммутирующих с произвольным элементом из G:*

$$Z(G) = \{a \in G | ax = xa, \forall \in G\}.$$

Теорема 5. *$Z(G)$ – подгруппа в G.*

Определение 5. *Пусть a – фиксированный элемент из G. Централизатором элемента a в группе G называется множество элементов из G, которые коммутируют с a:*

$$C(a) = \{g \in G | ga = ag\}.$$

Теорема 6. *Для $\forall a \in G$, где G – группа, центразатор этого элемента есть подгруппа в G.*