Лекция №4 (29.09.20)

1.4 Группы перестановок

1.4.1 Основные определения и обозначения

Определение 1. *Перестановка множества A – это биективная функция, действующая из A в A. Группа перестановок множества A – это множество перестановок множества A, которое образует группу относительно композиции функции.*

Определение 2. *Выражение вида* $[a_1, a_2, ..., a_m]$ *называется циклом длины* m *(*m*-циклом).*

1.4.2 Свойства перестановок

Теорема 1. *Каждая перестановка конечного множества представляет собой цикл или произведение непересекающихся циклов.*

Доказательство. Необходимо знать. □

Теорема 2. *Если циклы* $\varphi = [a_1, a_2, ..., a_m]$ *и* $\gamma = [b_1, b_2, ..., b_n]$ *не имеют общих элементов, то композиция этих перестановок коммутативна.*

Доказательство. Необходимо знать. □

Теорема 3. *Порядок перестановки конечного множества, представленной в виде непересекающихся циклов, равен наименьшему общему кратному длин этих циклов.*

Важным видом перестановки является цикл длины 2. Перестановку $[a, b]$, где $a \neq b$, назовем *транспозицией.*

Теорема 4. *Каждая перестановка в* S_n $(n > 1)$ *есть произведение* $2-$*циклов.*

Лемма 1. *Если* $\varepsilon = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot ... \cdot \varphi_r$*, где* φ_i *–* $2-$*циклы, то* r *– четное.*

Доказательство. Необходимо знать. □

Теорема 5. *Если* $\varphi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot ... \cdot \psi_r = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_s$*, где* ψ_i *и* φ_i *–* $2-$*циклы, то* r *и* s *оба четные, либо оба нечетные.*

Определение 3. *Перестановка, представленная в виде произведения четного числа* $2-$*циклов, называется четной. Для нечетного числа – нечетной.*

Теорема 6. *Множество четных перестановок в* S_n *образует подгруппу в* S_n.

Определение 4. *Группа четных перестановок множества* $\{1, 2, ..., n\}$ *называется альтернативной группой* A_n *степени* n.

Теорема 7. *Для* $|A_n| = \frac{n!}{2}$ *для* $n > 1$.