

Лекция №7 (27.10.20)

1.7 Внешнее прямое произведение

1.7.1 Основные определения и примеры

Определение 1. Пусть G_1, G_2, \dots, G_n – группы. Внешним прямым произведением этих групп $(G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n)$ называется множество n -наборов (n -векторов), для которых i -й элемент лежит в G_i и операция определена покомпонентно:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) | g_i \in G_i\}$$

1.7.2 Свойства внешнего прямого произведения

Теорема 1. $\text{ord}((g_1, g_2, \dots, g_n)) = \text{НОК}(\text{ord } g_1, \text{ord } g_2, \dots, \text{ord } g_n)$.

Теорема 2. Пусть G, H – конечные циклические группы. Тогда $G \oplus H$ – циклическая $\Leftrightarrow \text{НОД}(|G|, |H|) = 1$.

Следствие 1. $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ – циклическая $\Leftrightarrow \text{НОД}(|G_i|, |G_j|) = 1, i \neq j$.

Следствие 2. Пусть $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. Тогда $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \Leftrightarrow \text{НОД}(n_i, n_j) = 1, i \neq j$.

1.7.3 Группа единиц (обратимых элементов) по модулю n как внешнее прямое произведение

Введем обозначение:

$$U_k(n) = \{x \in U(n) | x \equiv 1 \pmod{k}\}, k|n.$$

Теорема 3. Пусть $\text{НОД}(s, t) = 1$. Тогда $U(st) \cong U(s) \oplus U(t)$. Кроме того, $U_s(st) \cong U(t)$, $U_t(st) \cong U(s)$.