
Практика №1

1 Теория групп.

1. Обосновать примеры и восполнить доказательства теорем в теоретической части параграфов: 1.1. Группы и 1.2. Конечные группы. Подгруппы.

1.1 Группы.

2. Найти обратный элемент к $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ в $GL(2, \mathbb{Z}_{11})$.

3. Показать, что множество $\{5, 15, 25, 35\}$ – группа относительно умножения по модулю 40. Что есть тождественный элемент этой группы? Какое соотношение между указанной группой и \mathbb{Z}_8^\times ?

4. Для произвольных элементов a и b и любого целого n доказать, что $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$.

5. Доказать, что множество $\{3^m 6^n | m, n \in \mathbb{Z}\}$ – группа относительно умножения.

1.2 Конечные группы. Подгруппы

6. Пусть $x \in G$, где G – группа. Если $x^2 \neq e$ и $x^6 = e$, доказать, что $x^4 \neq e$ и $x^5 \neq e$. Что можно сказать о $\text{ord}(x)$?

7. Пусть G – группа. Доказать, что $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$.

8. Пусть a – элемент группы G и $\text{ord}(a) = 5$. Доказать, что $C(a) = C(a^3)$.

9. Пусть a и b – элементы группы G , такие, что $\text{ord}(a) = 2$, $b \neq e$ и $aba = b^2$. Найти $\text{ord}(b)$.

10. Найти циклические подгруппы порядка 4 в $U(40)$.