Практика №11

2. Введение в теорию колец.

2.1. Основные опрделения. Подкольца.

1. Доказать, что пересечение произвольного множества подколец кольца R является подкольцом в R.

2. Пусть a и b лежат в коммутативном кольце R с единицей. Пусть a – обратим в R и $b^2 = 0$. Доказать, что $a + b$ является обратимым в R.

3. Является ли $\mathbb{Z}_6$ подкольцом в $\mathbb{Z}_{12}$?

4. Пусть R – кольцо с единицей и $a \in R$, такой, что $a^2 = 1$. Пусть $S = \{ara | r \in R\}$. Доказать, что S – подкольцо в R. Содержит ли S элемент 1?

5. Пусть $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $S = \{(a, b, c) \in R : a + b = c\}$. Доказать или опровергнуть, что S – подкольцо в R.

2.2. Кольца целостности.

1. Найти все делители нуля в $\mathbb{Z}_{20}$. Существует ли какая-либо взаимосвязь между делителями нуля и обратимыми элементами в $\mathbb{Z}_{20}$?

2. Пусть d –целое. Доказать, что $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо целостности.

3. Найти все обратимые элементы и делители нуля в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$.

4. Пусть F – поле с числом элементов 2^n. Доказать, что $\mathrm{char} F = 2$.

5. Пусть R – коммутативное кольцо без делителей нуля. Показать, что все ненулевые элементы кольца R имеют одинаковый аддитивный порядок.