
Практика №12

2. Введение в теорию колец.**2.3. Идеалы и факторкольца. Простые и максимальные идеалы.**

1. Доказать Теоремы 1 – 3.
2. Найти все максимальные идеалы в \mathbb{Z}_{10} .
3. Для целого $n > 1$ показать, что $(n) = n\mathbb{Z}$ – простой идеал в \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда n – простое.
4. Пусть A и B – идеалы некоторого кольца. Доказать, что $AB \subseteq A \cap B$.
5. Показать, что идеал I совпадает с кольцом R , если I содержит единицу кольца.
6. Показать, что $A = \{(3x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$ – максимальный идеал в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
7. Показать, что $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[X] | f(0) = 0\}$ не является максимальным идеалом в $\mathbb{Z}[X]$.
8. В $\mathbb{Z}_5[X]$ положим $I = (X^2 + X + 2)$. Найти обратный к элементу $2X + 3 + I$ в $\mathbb{Z}_5[X]/I$.
9. Доказать, что идеал $I = (2 + 2i)$ не является простым в $\mathbb{Z}[i]$. Из скольких элементов состоит фактор-кольцо $\mathbb{Z}[i]/I$? Чему равна характеристика $\mathbb{Z}[i]/I$?
10. Показать, что $\mathbb{Z}_3[X]/(X^2 + X + 1)$ не является полем.