Практика №12

2. Введение в теорию колец.

2.4. Гомоморфизм колец.

1. Знать доказательства теорем.

2. Является ли отображение $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$, $x \mapsto 3x$ гомоморфизмом колец?

3. Пусть $\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$. Доказать, что $\mathbb{Z}_3[i] \cong \mathbb{Z}_3[X]/\langle X^2 + 1\rangle$.

4. Пусть $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Доказать или опровергнуть, что отображение $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto a$ является гомоморфизмом колец.

5. Пусть $\phi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ – гомоморфизм колец. Найти $\phi((1, 0))$.

6. В $\mathbb{Z}$ пусть $A = \langle 2\rangle$ и $B = \langle 8\rangle$. Показать, что группа A/B изоморфна группе $\mathbb{Z}_4$, но кольцо A/B не изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_4$.

7. Пусть R и S – коммутативные кольца с единицами, $\phi : R \to S$ – сюръективный гомоморфизм колец, A – идеал в S.

- Если A – простой в S, доказать, что $\phi^{-1}(A) = \{x \in R : \phi(x) \in A\}$ – простой в R.

- Если A – максимальный в S, доказать, что $\phi^{-1}(A)$ – максимальный в R.

8. Определить все гомоморфизмы колец, действующие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.