
Практика №13

2. Введение в теорию колец.**2.5. Кольцо многочленов.**

1. Пусть $f(X) = 4X^3 + 2X^2 + X + 3$ и $g(X) = 3X^4 + 3X^3 + 3X^2 + X + 4$, где $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}_5[X]$. Вычислить $f(X) + g(X)$ и $f(X) \cdot g(X)$.
2. Если R – коммутативное кольцо, показать, что $\text{char}(R[X]) = \text{char}(R)$.
3. Если $R \cong S$, показать, что $R[X] \cong S[X]$.
4. Пусть $f(X) = 5X^4 + 3X^3 + 1$ и $g(X) = 3X^2 + 2X + 1$ – многочлены из $\mathbb{Z}_7[X]$. Найти частное и остаток от деления f на g .
5. Доказать, что $\mathbb{Z}[X]$ не является кольцом главных идеалов.
6. Пусть F – поле и $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in F[X]$. Доказать, что $X - 1$ делит $f(X)$ тогда и только тогда, когда $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$.
7. Доказать, что $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ изоморфно $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$.
8. Найти остаток от деления X^{51} на $X + 4$ в $\mathbb{Z}_7[X]$.