

---

**Практика №16**

---

**2. Введение в теорию колец.****2.7. Делимость в кольцах целостности.**

1. В кольце целостности показать, что элементы  $a$  и  $b$  ассоциированы тогда и только тогда, когда  $(a) = (b)$ .

2. Показать, что в кольце целостности произведение неприводимого и обратимого элементов есть неприводимый элемент.

3. Пусть  $D$  – евклидово кольцо с мерой  $d$ . Доказать, что  $u$  обратим в  $D$  тогда и только тогда, когда  $d(u) = d(1)$ .

4. Пусть  $D$  – евклидово кольцо с мерой  $d$ . Доказать, что если  $a$  и  $b$  ассоциированы, то  $d(a) = d(b)$ .

5. Пусть  $D$  – кольцо главных идеалов и  $p \in D$ . Доказать, что  $(p)$  – максимальный идеал тогда и только тогда, когда  $p$  – неприводим.

6. В  $\mathbb{Z}[i]$  найти  $q$  и  $r$ , такие, что  $3 - 4i = (2_5i)q + r$ , где  $d(r) < d(2 + 5i)$ .

7. В  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  показать, что 21 имеет не единственное разложение на множители.

8. Доказать, что  $1 - i$  является неприводимым в  $\mathbb{Z}[i]$ .

9. Доказать, что кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  не является кольцом главных идеалов.

10. Доказать, что в  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  элементы 2 и  $1 + \sqrt{5}$  являются неприводимыми, но не простыми.