
Практика №5

1. Введение в теорию групп.**1.5. Изоморфизмы.**

1. Найти $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.
2. Пусть G – группа. Доказать, что отображение $\varphi(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда G – абелева.
3. Найти $\text{Aut}(\mathbb{Z}_6)$.
4. Доказать, что отображение $U(16) \rightarrow U(16)$, $x \mapsto x^3$ является автоморфизмом. Что можно сказать об отображениях $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^7$?
5. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{50} \rightarrow \mathbb{Z}_{50}$ – автоморфизм, такой, что $\varphi(11) = 13$. Определить формулу для $\varphi(x)$.
6. Доказать, что отображение $\varphi(a + bi) = a - bi$ является автоморфизмом группы комплексных чисел относительно сложения.
7. Пусть G – конечная абелева группа и G не имеет элементов порядка 2. Доказать, что отображение $g \mapsto g^2$ задает автоморфизм группы G .
8. Пусть $a \in G$ и $\text{ord}(a) < \infty$. Пусть φ_a – автоморфизм группы G , $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Показать, что $\text{ord}(a) \mid \text{ord}(\varphi_a)$.