
Практика №8

1. Введение в теорию групп.**1.8. Нормальные подгруппы и фактор-группы.**

1. Пусть $G = GL_2(\mathbb{R})$ и K – подгруппа мультипликативной группы \mathbb{R}^\times . Доказать, что $H = \{A \in G \mid \det A \in K\}$ – нормальная подгруппа в G .

2. Рассмотрим $\langle 3 \rangle$ и $\langle 12 \rangle$ как подгруппы в \mathbb{Z} . Доказать, что $\langle 3 \rangle / \langle 12 \rangle$ изоморфна \mathbb{Z}_4 .

3. Доказать, что если H имеет индекс 2 в группе G , то $H \triangleleft G$.

4. Показать, что $H = \{(1), (12)(34)\}$ – нормальная в A_4 .

5. Пусть $G = \mathbb{Z}_4 \oplus U(4)$, $H = \langle (2, 3) \rangle$ и $K = \langle (2, 1) \rangle$. Показать, что $G/H \not\cong G/K$.

6. Доказать:

- фактор-группа циклической группы является циклической;
- фактор-группа абелевой группы является абелевой.

7. Найти порядок элемента $14 + \langle 8 \rangle$ в фактор-группе $\mathbb{Z}_{24} / \langle 8 \rangle$.

8. Пусть $G = \mathbb{Z} / \langle 20 \rangle$ и $H = \langle 4 \rangle / \langle 20 \rangle$. Найти элементы H и G/H .

9. Найти порядок фактор-группы $(\mathbb{Z}_{10} \oplus U(10)) / \langle (2, 9) \rangle$.

10. Пусть $H = \langle 5 \rangle$ и $K = \langle 7 \rangle$ – подгруппы в \mathbb{Z} . Что есть $H \times K$?