Практика №9

1. Введение в теорию групп.

1.9. Гомоморфизм групп.

1. Пусть $\varphi : G \to H$ и $\sigma : H \to K$ – гомомрфизмы групп. Показать, что $\sigma \circ \varphi : G \to K$ – гомомрфизм. Как взаимосвязаны $Ker(\varphi)$ и $Ker(\sigma \circ \varphi)$? Если φ и σ – сюръективны и $|G| < \infty$, описать $[Ker(\sigma \circ \varphi) : Ker(\varphi)]$ в терминах $|H|$ и $|K|$.

2. Доказать, что отображение $\varphi : G \bigoplus H \to H$, $\varphi((g, h)) = g$ является гомоморфизмом групп. Что есть $Ker(\varphi)$?

3. Доказать, что $(\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z})/(\langle(a, 0)\rangle \times \langle(0, b)\rangle) \cong \mathbb{Z}_a \bigoplus \mathbb{Z}_b$.

4. Обосновать, почему отображение $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\varphi(x) = 3x$ не является гомоморфизмом групп.

5. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_{30}$ – гомоморфизм групп и $Ker(\varphi) = \{0, 10, 20\}$. Определить все элементы, отображающиеся в 9 при условии, что $\varphi(23) = 9$.

6. Если φ – гомоморфизм, действующий из $\mathbb{Z}_{30}$ в группу порядка 5, найти $Ker(\varphi)$.

7. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_{15}$ – гомоморфизм групп и $\varphi(7) = 6$.

- Определить $\varphi(x)$.
- Определить образ φ.
- Определить $Ker(\varphi)$.
- Определить $\varphi^{-1}(3)$.

8. Предположим, что существует сюръективный гомоморфизм из конечной группы G в $\mathbb{Z}_{10}$. Доказать, что G имеет нормальные подгруппы индексов 2 и 5.

9. Описать явно гомоморфизм $\varphi : U(30) \to U(30)$ с ядром $Ker(\varphi) = \{1, 11\}$ и свойством $\varphi(7) = 7$.

10. Доказать, что отображение $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto x^6$ является гомоморфизмом. Найти его ядро.