Лекция №10

1.10 Фундаментальная теорема конечных абелевых групп

Теорема 1. *Всякая конечная абелева группа является прямым произведением циклических групп порядков, равных степеням простых чисел:*

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}},$$

где p_i – различные простые числа, $n_i \geq 0$.

Рассмотрим конечную абелеву группу G. Пусть $|G| = p^k$ и $k = n_1 + n_2 + ... + n_t$, $n_i \in \mathbb{N}$, тогда

$$G \cong \mathbb{Z}_p{}^{n_1} \oplus \mathbb{Z}_p{}^{n_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_p{}^{n_t}.$$

Алгоритм:

Вход: группа G порядка p^n.

Выход: представление группы G.

1. Вычисляем порядки элементов группы G.
2. Выбираем элемент a_1 максимального порядка и полагаем $G_1 = \langle a_1 \rangle$.
3. Если $|G| = |G_1|$, то завершаем алгоритм. Иначе $i := i + 1$.
4. Выбираем элемент a_i максимального порядка p^k так, чтобы $p^k \leq \frac{|G|}{|G_1|}$ и ни один из элементов $a_i, a_i^p, ..., a_i^{p^{k-1}}$ не лежал бы в G_{i-1}. Полагаем $G_i \cong G_{i-1} \oplus \langle a_i \rangle$.
5. Возврат на шаг 3.

Следствие 1. *Пусть G – конечная абелева группа. Если $m \big| |G|$, то G имеет подгруппу порядка m.*

Лемма 1. *Пусть G – конечная абелева группа порядка $p^n m$, где $p \not| m$. Тогда $G = H \times K$, где $H = \{x \in G | x^{p^n} = e\}$ и $K = \{x \in G | x^m = e\}$, причем $|H| = p^n$.*

Лемма 2. *Пусть G – абелева группа порядка p^n и $a \in G$ – элемент максимального порядка. Тогда $G = \langle a \rangle \times K$.*

Лемма 3. *Конечная абелева группа порядка p^n представима в виде внутреннего прямого произведения циклических групп.*