Лекция №11

2 Введение в теорию колец

2.1 Основные определения

Определение 1. *Кольцом R называется множество элементов с двумя бинарными операциями (по умолчанию будем считать, что это сложение и умножение), такими, что*

1. *Коммутативность:* $a + b = b + a$;
2. *Ассоциативность:* $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. *Существует нейтральный элемент* 0 *относительно сложения:*
$$a + 0 = 0 + a = a, \ \ \forall a \in R;$$
4. *Для заданного элемента судествует противоположный к нему отностильно сложения:*
$$-a \in R, \ \ \textit{причем} \ \ (-a) + a = a + (-a) = 0;$$
5. *Ассоциавтивность:* $a(bc) = (ab)c$;
6. *Дистрибутивность:* $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$.

Теорема 1 (Простейшие свойства)**.** *Пусть R – кольцо и $a, b, c \in R$. Тогда*

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$;
3. $(-a)(-b) = ab$;
4. $a(b - c) = ab - ac$, $(b - c)a = ba - ca$.

   Кроме того, если R имеет единицу 1, *то*

5. $(-1)a = -a$:
6. $(-1)(-1) = 1$.

Теорема 2. *Если кольцо имеет единицу, то она единствененна. Если для $a \in R$ существует a^{-1}, то a^{-1} единственен.*

Определение 2. *Подмножество S кольца R называется подкольцом в R, если само является кольцом относительно операций, заданных в R.*

Теорема 3 (Признак подкольца)**.** *Непустое подмножество S кольца R является подкольцом, если для любых $a, b \in S$ выполняются условия: $a - b \in S$ и $ab \in S$.*

2.2 Кольца целостности

Определение 3. *Пусть R – коммутативное кольцо. Элемент $0 \neq a \in R$ называется делителем нуля, если существует $0 \neq b \in R$ и $ab = 0$.*

Определение 4. *Кольцом целостности называется коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.*

Теорема 4. *Пусть R – кольцо целостности, $a, b, c \in R$. Если $a \neq 0$ и $ab = ac$, то $b = c$.*

Определение 5. *Полем называется коммутативное кольцо с единицей, в котором любой отличный от нуля элемент обратим.*

Теорема 5. *Конечное кольцо целостности является полем.*

Следствие 1. *Для любого простого p кольцо $\mathbb{Z}_p$ является полем.*

Определение 6. *Характеристикаой кольца R называется наименьшее положительное целое n, такое, что $n \cdot x = 0$ для всех $x \in R$. Если такого n не существует, то будем говорить, что R имеет характеристику 0. Обозначается $\mathrm{char} R = n$.*

Теорема 6. *Пусть R – кольцо с единицей. Если единица имеет бесконечный порядок относительно сложения, то $\mathrm{char} R = 0$. Если единица имеет порядок n относительно сложения, то $\mathrm{char} R = n$.*

Теорема 7. *Если R – кольцо целостности, то* $\mathrm{char} R = \left[\begin{array}{l} 0, \\ p \text{ – простое.} \end{array} \right.$