

---

**Лекция №12**

---

**2 Введение в теорию колец****2.3 Идеалы и фактор-кольца**

**Определение 1.** *Подкольцо  $A$  кольца  $R$  называется идеалом кольца  $R$ , если для  $\forall r \in R$  и  $\forall a \in A$  имеет место  $ra, ar \in A$ . Идеал  $A$  называется собственным идеалом кольца  $R$ , если  $A \subsetneq R$ .*

Пусть  $R$  – кольцо, тогда  $R$  – аддитивная группа. Мы можем рассматривать идеал  $A$  в  $R$  как нормальную подгруппу в  $R$ . Запишем  $R/A = \{r + A | r \in R\}$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $R$  – кольцо,  $A$  – подкольцо в  $R$ . Множество классов вычетов  $\{r + A | r \in R\}$  является кольцом относительно следующих операций:*

$$(s + A) + (t + A) = (s + t) + A; (s + A) \cdot (t + A) = (st) + A$$

*тогда и только тогда, когда  $A$  – идеал в  $R$ .*

**Определение 2.** *Простым идеалом  $A$  коммутативного кольца  $R$  называется собственный идеал в  $R$ , такой, что для  $a, b \in R$  и  $ab \in A \Rightarrow \begin{cases} a \in A, \\ b \in A. \end{cases}$*

**Определение 3.** *Максимальным идеалом  $A$  коммутативного кольца  $R$  называется собственный идеал в  $R$ , такой, что не существует идеала  $B$  в  $R$ , такого, что  $A \subsetneq B \subsetneq R$ .*

**Теорема 2.** *Пусть  $R$  – коммутативное кольцо с единицей,  $A$  – идеал в  $R$ . Фактор-кольцо  $R/A$  является кольцом целостности тогда и только тогда, когда  $A$  – простой идеал.*

**Теорема 3.** *Пусть  $R$  – коммутативное кольцо с единицей,  $A$  – идеал в  $R$ . Фактор-кольцо  $R/A$  является полем тогда и только тогда, когда  $A$  – максимальный идеал.*