Лекция №13

2 Теория колец

2.4 Гомоморфизм колец

2.4.1 Основные определения и примеры

Определение 1. *Гомоморфизмом колец $\varphi : R \to S$ называется отображение, удовлетворяющее следующим условиям для произвольных $a, b \in R$:*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
2. $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Изоморфизмом колец называется гомоморфизм колец, действующий биективно.

2.4.2 Свойства гомоморфизмов колец

Теорема 1. *Пусть $\varphi : R \to S$ – гомоморфизм колец, A – подкольцо в R, B – идеал в S.*

1. *Для всякого $r \in R$ и положительного целого n:*
$$\varphi(n \cdot r) = n \cdot \varphi(r), \quad \varphi(r^n) = (\varphi(r))^n.$$
2. $\varphi(A) = \{\varphi(a) \big| a \in A\}$ *– подкольцо в S.*
3. $\varphi^{-1}(B) = \{r \in R \big| \varphi(r) \in \varphi\}$ *– идеал в B.*
4. *Если R – коммутативно, то $\varphi(R)$ – коммутативно.*
5. *Если $1 \in R$, $S \neq \{0\}$ и φ – сюръективен, то $\varphi(1)$ – единица в S.*
6. *φ – изоморфизм $\Leftrightarrow$ φ - сюръективен и $Ker\ \varphi = \{r \in R \big| \varphi(r) = 0\} = \{0\}$.*
7. *Если φ – изоморфизм, то φ^{-1} – изоморфизм.*

Теорема 2. *Пусть $\varphi : R \to S$ – изоморфизм колец. Тогда $Ker\ \varphi = \{r \in R \big| \varphi(r) = 0\}$ – идеал в R.*

Теорема 3. *Пусть $\varphi : R \to S$ – изоморфизм колец. Тогда отображение $R/Ker\ \varphi \to \varphi(R)$, $r + Ker\ \varphi \mapsto \varphi(r)$ является изоморфизмом, $R/Ker\ \varphi \cong \varphi(R)$.*

Теорема 4. *Любой идеал в кольце R является ядром гомоморфизма кольца R. В частности, идеал A из R есть $Ker\ \varphi$, где $\varphi : R \to R/A$, $r \mapsto r + A$.*

Теорема 5. *Пусть R – кольцо с единицей. Отображение $\varphi : \mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n \cdot 1$ является гомоморфизмом колец.*

Следствие 1. *Если R – кольцо с единицей и $char(R) = n > 0$, то R содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}_n$. Если $char(R) = 0$, то R содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}$.*

Следствие 2. *Для всех положительныц целых m отображение $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, $x \mapsto x\ (mod\ m)$ является гомоморфизмом.*

Следствие 3. *Пусть F – поле и $char\ F = p$. Тогда F содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}_p$. Если $char\ F = 0$, то F содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел.*

Теорема 6. *Пусть D – кольцо целостности. Тогда существует поле F, которое содержит подкольцо, изоморфное D.*