Лекция №14

2 Теория колец

2.5 Кольца многочленов

2.5.1 Основные определения

Определение 1. *Пусть R – коммутативное кольцо. Множество*

$$R[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \big| a_i \in R\}, n \in \mathbb{N}$$

называется кольцом многочленов над R от переменной X.

Определение 2. *Пусть R – коммутативное кольцо. Пусть $f(X), g(X) \in R[X]$, тогда*

$$f(X) + g(X) = (a_s + b_s)X^s + \ldots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$$

и

$$f(X) \cdot g(X) = c_{m+n} X^{m+n} + \ldots + c_1 X + c_0,$$

где $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k, k = 0, \ldots, m+n$.

Теорема 1. *Если D – кольцо целостности, то $D[X]$ – кольцо целостности.*

Доказательство. Необходимо знать! □

2.5.2 Алгоритм деления

Теорема 2. *Пусть F – поле и $f(X), g(X) \in F[X]$. Тогда существуют единственные $q(X), r(X) \in F[X]$, такие, что $f(X) = g(X) \cdot q(X) + r(X)$ и либо $r(X) = 0$, либо $\deg r < \deg g$.*

Следствие 1. *Элемент a является корнем многочлена $f(X)$ тогда и только тогда, когда $(X - a)$ – множитель $f(X)$.*

Следствие 2. *Многочлен степени n, определенный над некоторым полем, имеет не более n корней с учетом их кратности.*

Определение 3. *Кольцом главных идеалов называется кольцо целостности, в котором любой идеал главный.*

Теорема 3. *Пусть F – поле, I – ненулевой идеал в $F[X]$ и $g(X) \in F[X]$. Тогда $I = (g(X)) \Leftrightarrow g(X)$ – ненулевой многочлен минимальной степени в I.*