

### Лекция №3

---

## 1.3 Группы перестановок

### 1.3.1 Основные определения и обозначения

**Определение 1.** Перестановка множества  $A$  – это биективная функция, действующая из  $A$  в  $A$ . Группа перестановок множества  $A$  – это множество перестановок множества  $A$ , которое образует группу относительно композиции функции.

**Определение 2.** Выражение вида  $[a_1, a_2, \dots, a_m]$  называется циклом длины  $m$  ( $m$ -циклом).

### 1.3.2 Свойства перестановок

**Теорема 1.** Каждая перестановка конечного множества представляет собой цикл или произведение непересекающихся циклов.

*Доказательство.* Необходимо знать. □

**Теорема 2.** Если циклы  $\varphi = [a_1, a_2, \dots, a_m]$  и  $\gamma = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  не имеют общих элементов, то композиция этих перестановок коммутативна.

*Доказательство.* Необходимо знать. □

**Теорема 3.** Порядок перестановки конечного множества, представленной в виде непересекающихся циклов, равен наименьшему общему кратному длин этих циклов.

Важным видом перестановки является цикл длины 2. Перестановку  $[a, b]$ , где  $a \neq b$ , назовем транспозицией.

**Теорема 4.** Каждая перестановка в  $S_n$  ( $n > 1$ ) есть произведение 2–циклов.

**Лемма 1.** Если  $\varepsilon = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_r$ , где  $\varphi_i$  – 2–циклы, то  $r$  – четное.

*Доказательство.* Необходимо знать. □

**Теорема 5.** Если  $\varphi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \dots \cdot \psi_r = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_s$ , где  $\psi_i$  и  $\varphi_i$  – 2–циклы, то  $r$  и  $s$  оба четные, либо оба нечетные.

**Определение 3.** Перестановка, представленная в виде произведения четного числа 2–циклов, называется четной. Для нечетного числа – нечетной.

**Теорема 6.** Множество четных перестановок в  $S_n$  образует подгруппу в  $S_n$ .

**Определение 4.** Группа четных перестановок множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется знакопеременной группой  $A_n$  степени  $n$ .

**Теорема 7.** Для  $|A_n| = \frac{n!}{2}$  для  $n > 1$ .