Лекция №5

1. Введение в теорию групп.

1.5 Изоморфизм групп

1.5.3 Свойства изоморфизмов

Теорема 1. *$\varphi : G \to G'$ – изоморфизм групп.*

1. $\varphi(e_G) = e_{G'}$.
2. *Для* $\forall n \in Z$ *и* $\forall a \in G : \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$.
3. *Для* $\forall a, b \in G$*:* $ab = ba \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$.
4. $G = \langle a \rangle \Leftrightarrow G' = \langle \varphi(a) \rangle$.
5. $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \varphi(a)$ *для* $\forall a \in G$.
6. *Для фиксированных* $k \in \mathbb{Z}$ *и* $b \in G$ *уравнение* $x^k = b$ *в группе* G *имеет столько же решений, что и уравнение* $x^k = \varphi(b)$ *в* G'.
7. *Если* G *– конечна, то* $|G| = |G'|$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi : G \to G'$ *– изоморфизм групп.*

1. $\varphi^{-1} : G' \to G$ *– также изоморфизм групп.*
2. G *– абелева* $\Leftrightarrow$ G' *– абелева.*
3. G *– циклическая* $\Leftrightarrow$ G' *– циклическая.*
4. *Если* $K \subseteq G$*, то* $\varphi(K) = \{\varphi(k) | k \in K\}$ *– подгруппа в* G'.

1.5.4 Автоморфизм

Определение 1. *Изоморфизм группы* G *на себя называется автоморфизмом группы* G.

Определение 2. *Пусть* G *– группа,* $a \in G$*. Функция* $\varphi_a(x) = axa^{-1}$*, где* $\forall x \in G$*, называется внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом* a.

Теорема 3. *Множество автоморфизмов группы и множество внутренних автоморфизмов группы являются группами относительно композиции функций.*

Теорема 4. *Для всякого положительного* n *группа* $Aut(\mathbb{Z}_n)$ *изоморфна группе* $U(n)$.