Лекция №7

1.7 Внешнее прямое произведение

Определение 1. *Пусть $G_1, G_2, ..., G_n$ – группы. Внешним прямым произведением этих групп ($G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$) называется множество n-наборов (n-векторов), для которых i-й элемент лежит в G_i и операция определена покомпонентно:*

$$G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n = \{(g_1, g_2, ..., g_n) | g_i \in G_i\}.$$

.

Теорема 1. $\operatorname{ord}\Big((g_1, g_2, ..., g_n)\Big) = \textit{НОК}(\operatorname{ord} g_1, \operatorname{ord} g_2, ..., \operatorname{ord} g_n)$.

Доказательство. Доказательство неоходимо знать. □

Теорема 2. *Пусть G, H – конечные циклические группы. Тогда $G \oplus H$ – циклическая $\Leftrightarrow$ НОД$(|G|, |H|) = 1$.*

Доказательство. Доказательство неоходимо знать. □

Следствие 1. *$G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$ – циклическая $\Leftrightarrow$ НОД$(|G_i|, |G_j|) = 1, i \neq j$.*

Следствие 2. *Пусть $m = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$. Тогда $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \Leftrightarrow$ НОД$(n_i, n_j) = 1, i \neq j$.*

Введем обозначение:

$$U_k(n) = \{x \in U(n) | x \equiv 1 \pmod{k}\}, k|n.$$

Теорема 3. *Пусть НОД$(s,t) = 1$. Тогда $U(st) \cong U(s) \oplus U(t)$. Кроме того, $U_s(st) \cong U(t)$, $U_t(st) \cong U(s)$.*