Лекция №8

1.8 Нормальные подгруппы и фактор-группы

1.8.1 Нормальные подгруппы

Определение 1. *Подгруппа H группы G называется нормальной ($H \triangleleft G$), если $aH = Ha$ для $\forall a \in G$.*

Теорема 1. $H \triangleleft G \Leftrightarrow xHx^{-1} \subseteq H, \forall x \in G$.

Доказательство. Необходимо знать. □

1.8.2 Фактор-группы

Определение 2. *Пусть $H \triangleleft G$. Фактор-группой группы G по подгруппе H называется множество:*

$$G/H = \{aH | a \in G\}.$$

Теорема 2. *Пусть $H \triangleleft G$. Множество $G/H = \{aH | a \in G\}$ является группой относительно операции $(aH)(bH) = abH$.*

Доказательство. Необходимо знать. □

1.8.3 Приложения фактор-групп

Если G – конечна и $H \neq \{e\}$, то $|G/H| < |G|$.

Теорема 3. *Пусть G – группа, $Z(G)$ – ее центр. Если $G/Z(G)$ – циклическая, то G – абелева.*

Доказательство. Необходимо знать. □

Теорема 4. *(Коши) Пусть G – конечная абелева группа, p – простое и $p \mid |G|$. Тогда G имеет элемент порядка p.*

1.8.4 Внутреннее прямое произведение

Определение 3. *G называется внутренним прямым произведением групп H и K ($G = H \times K$), если $H \triangleleft G, K \triangleleft G$, $G = H \cdot K$ и $H \cap K = \{e\}$.*

Определение 4. *Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – нормальные подгруппы в группе G. Группа G называется прямым произведением этих подгрупп, т.е. $G = H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$, если*

1. $G = H_1 \cdot H_2 \cdot ... \cdot H_n = \{h_1 \cdot h_2 \cdot ... \cdot h_n | h_i \in H_i\}$;
2. $(H_1 \cdot H_2 \cdot ... \cdot H_{i-1} \cdot H_{i+1} \cdot ... \cdot ...H_n) \cap H_i = \{e\}; i = \overline{1, n}$.

Теорема 5. *Если группа G является внутренним прямым произведением конечного числа подгрупп $H_1, H_2, ..., H_n$, то $G \cong H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$.*

Теорема 6. *Всякая группа порядка p^2, где p – простое, изоморфна $\mathbb{Z}_{p^2}$ или $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.*

Следствие 1. *Если G – группа порядка p^2, p – простое, то G – абелева.*