Лекция №9

1.9 Гомоморфизм групп

1.9.1 Определение и примеры

Определение 1. *Гомоморфизмом групп $\varphi : G \to G'$ называется отображение, сохраняющее групповую операцию:*

$$\varphi(a *_G b) = \varphi(a) *_{G'} \varphi(b).$$

Определение 2. *Ядром гомоморфизма $\varphi : G \to G'$ называется множество:*

$$Ker(\varphi) = \{x \in G | \varphi(x) = e\}.$$

1.9.2 Свойства гомоморфизмов

Теорема 1. *Пусть φ – гомоморфизм групп $G \to G'$ и $g \in G$. Тогда*

1. $\varphi(e_G) = e_{G'}$.
2. $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$.
3. *Если* $\operatorname{ord}(g) < \infty$, *то* $\operatorname{ord}(\varphi(g)) | \operatorname{ord}(g)$.
4. $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow aKer(\varphi) = bKer(\varphi)$.
5. *Если* $\varphi(g) = g'$, *то* $\varphi^{-1}(g') = \{x \in G | \varphi(x) = g'\} = gKer(\varphi)$.

Доказательство. Доказательство необходимо знать. □

Теорема 2. *Пусть φ – гомоморфизм групп $G \to G'$, H – подгруппа в G. Тогда*

1. $\varphi(H) = \{\varphi(h) | h \in H\}$ *– подгруппа в* G.
2. *Если H – циклическая, то $\varphi(H)$ – циклическая.*
3. *Если H – абелева, то $\varphi(H)$ – абелева.*
4. *Если $H \triangleleft G$, то $\varphi(H) \triangleleft G'$.*
5. *Если $|H| = n$, то $\big|\varphi(H)\big| \big| n$*

6. *Если* H' *– подгруппа в* G'*, то* $\varphi^{-1}(H') = \{h \in G | \varphi(h) \in G'\}$ *– подгруппа в* G*.*

7. *Если* $H' \triangleleft G'$*, то* $\varphi^{-1}(H') = \{h \in G | \varphi(h) \in G'\} \triangleleft G$*.*

8. *Если* φ *– сюръективен и* $Ker\ \varphi = \{e\}$*, то* φ *– изоморфизм (*$G \cong G'$*).*

Доказательство. Доказательство необходимо знать. □

Следствие 1. *Если* φ *– гомоморфизм групп* $G \to G'$*, то* $Ker(\varphi)$ *– нормальная подгруппа в* G*.*

1.9.3 Первая теорема об изоморфизме

Теорема 3. *Пусть* φ *– гомоморфизм групп* $G \to G'$*. Тогда отображение* $G/Ker(\varphi) \to \varphi(G)$*, при котором* $gKer(\varphi) \mapsto \varphi(g)$*, является изоморфизмом* $G/Ker(\varphi) \cong \varphi(G)$*.*

Доказательство. Доказательство необходимо знать. □

Следствие 2. *Если* $\varphi : G \to G'$ *– гомоморфизм конечных групп, то* $|\varphi(G)|\big||G|$ *и* $|\varphi(G)|\big||G'|$*.*

Теорема 4. *Всякая нормальная подгруппа в* G *является ядром гомоморфизма* $\varphi : G \to G'$*. В частности, если* $N \triangleleft G$*, то* $N = Ker(\varphi)$*, где* $\varphi : G \to\ G/N$ *и* $g \mapsto gN$*.*