Практика №4 (01.10.20)

3. Теория сравнений.

3.1. Основные свойства сравнений.

1. Найти остаток от деления на 4 выражения $1^5 + 2^5 + ... + 99^5 + 100^5$.

2. Проверить, что $0, 1, 2, 2^2, ..., 2^9$ образуют полную систему вычестов по модулю 11, а $0, 1^2, 2^2, ..., 10^2$ – нет.

3. Доказать, что если $a \equiv b \pmod{n_1}$ и $a \equiv b \pmod{n_2}$, то $a \equiv b \pmod{n}$, где $n = \text{НОК}(n_1, n_2)$. Следовательно, если n_1 и n_2 – взаимно простые, то $a \equiv b \pmod{n_1 \cdot n_2}$.

4. Доказать, что если a – нечетное целое число, то

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$$

для любого $n \geq 1$.

3.2. Некоторые признаки делимости.

5. Найти последние две цифры числа 9^{9^9}.

6. Доказать следующие критерии делимости:

1. Целое число делится на 2 тогда и только тогда, когда его цифра разряда единиц равна $0, 2, 4, 6$ или 8.

2. Целое число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

3. Целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его цифрами разряда десятков и единиц, делится на 4.

7. Пусть $N = a_m 10^m + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, где $0 \leq a_k \leq 9$, – десятичное разложение натурального числа N. Доказать, что $7, 11$ и 13 делят N тогда и только тогда, когда $7, 11$ и 13 делят целое число

$$M = (100a_2 + 10a_1 + a_0) - (100a_5 + 10a_4 + a_3) + (100a_8 + 10a_7 + a_{6)} - \cdots .$$