

Практика №6 (22.10.20)

4. Теоретико-числовые функции.

4.1. Функции τ и σ .

1. Для любого целого числа $n \geq 1$ проверить выполнимость неравенства $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

2. Показать, что $\sum_{d|n} 1/d = \sigma(n)/n$ для каждого натурального числа n .

3. Пусть n – целое число, свободное от квадратов. Доказать, что $\tau(n) = 2^r$, где r – число простых делителей n .

4. Для фиксированного целого числа k показать, что функция $f(n) = n^k$ мультипликативна.

4.2. Формула обращения Мёбиуса.

5. Для каждого положительного целого числа n показать, что

$$\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0.$$

6. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ – факторизация простого числа $n > 1$ и f – мультипликативная функция. Доказать, что

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_r)).$$