

Практика №8 (09.11.20)

5. Функция Эйлера и ее приложения.

5.1. φ -функция Эйлера.

1. Вычислить $\varphi(1001)$.
2. Показать, что для целых $m = 3^k \cdot 568$ и $n = 3^k \cdot 638$, где $k \geq 0$, имеет место:

$$\tau(m) = \tau(n), \quad \sigma(m) = \sigma(n), \quad \varphi(m) = \varphi(n).$$

3. Доказать, что $\varphi(n) = \varphi(n + 2)$ для $n = 2(2p - 1)$, где p и $2p - 1$ – оба нечетные простые.
4. Доказать, что если n имеет r различных нечетных простых множителей, то $2^r | \varphi(n)$.

5.2. Теорема Эйлера.

5. Используя теорему Эйлера, проверить выполнимость условия $a^{37} \equiv a \pmod{1729}$ для произвольного целого a .
6. Если m и n – взаимно простые положительные целые числа, доказать

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

7.

1. Если $\text{НОД}(a, n) = 1$, показать, что линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$ имеет решение $x \equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$.
2. Используя часть (1), решить сравнения $3x \equiv 5 \pmod{26}$ и $13x \equiv 2 \pmod{40}$.