Лекция №6 (19.10.20)

4. Теоретико-числовые функции.

4.1. Функции τ и σ.

Всякую функцию, чья область определения представляет собой множество положительных целых чисел, будем называть *теоретико-числовой функцией.*

Определение 1. *Для положительного целого n обозначим $\tau(n)$ – число положительных делителей числа n и $\sigma(n)$ – сумма этих делителей.*

Функции τ и σ могут быть выражены следующим образом:

$$\tau = \sum_{d|n} 1, \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Теорема 1. *Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ – разложение на простые множители числа $n > 1$, то положительными делителями n являются в точности целые d вида*

$$d = n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r},$$

где $0 \leq a_i \leq k_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Теорема 2. *Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ – разложение на простые множители числа $n > 1$, то*

- $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1)$,
- $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$.

Определение 2. *Теоретико-числовая функция f называется мультипликативной, если*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

при НОД$(m, n) = 1$.

Следуя методу индукции, если f мультипликативна и $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — попарно взаимно простые положительные целые числа, то

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_r) = f(n_1)f(n_2)\ldots f(n_r).$$

Теорема 3. *Функции τ и σ — обе мультипликативные функции.*

Для формулировки общего результата для мультипликативных функций нам потребуется предварительная лемма.

Лемма 1. *Если НОД$(m, n) = 1$, то множество положительных делителей числа mn состоит из произведений d_1d_2, где $d_1|n$, $d_2|m$ и НОД$(d_1, d_2) = 1$, кроме того, все эти произведения различны.*

Ключевую роль для теоретико-числовых функций играет следующая теорема.

Теорема 4. *Если f — мультипликативная функция, а F определяется следующим образом:*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

то F также мультипликативна.

4.2. Формула обращения Мёбиуса.

Определение 3. *Для положительного целого числа n определим μ следующим образом:*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n \text{ для некоторый простых } p, \\ (-1)^r, & \text{если } n = p_1p_2\ldots p_r, \text{ где } p_i \text{ являются различными простыми числами.} \end{cases}$$

Таким образом, $\mu(n) = 0$, если n не является свободным от квадратов, и $\mu(n) = (-1)^r$, если n является свободным от квадратом с r простыми множителями.

Теорема 5. *Функция μ является мультипликативной функцией.*

Теорема 6. *Для каждого положительного числа* $n \geqslant 1$ *имеет место*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1 \end{cases}$$

где d *пробегает все положительные делители* n.

Полное представление функции Мебиуса дает следующая теорема.

Теорема 7 (Формула обращения Мёбиуса)**.** *Пусть* F *и* f *– теоретико-числовые функции, связанные формулой*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Тогда

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d) = \sum_{d|n} \mu(n/d) F(d).$$

Можно задаться вопросом, является ли мультипликативной функция f с учетом мультипликативности F? Ответ на это дает следующая теорема.

Теорема 8. *Если* F *– мультипликативная функция и*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

тогда f *также мультипликативна.*