Лекция №7 (26.10.20)

4. Теоретико-числовые функции.

4.3. Функция наибольшего целого.

Определение 1. *Для произвольного действительного числа x обозначим $[x]$ – наибольшее целое, меньшее или равное x. Т.е. $[x]$ – единственное целое число, удовлетворяющее условию $x - 1 < [x] \leq x$.*

Данное определение можно переформулировать следущим образом: всякое действительное число x может быть записано в виде:

$$x = [x] + \theta$$

для подходящего θ, такого, что $0 \leq \theta < 1$.

Теорема 1. *Если n – положительное целое и p – простое, то показатель наивысшей степени числа p, которая делит $n!$ равен*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Результат, представленный в теореме можно записать в виде:

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]}.$$

Имея представление функции наибольшего целого, с ее помощью мы можем записывать выражения для теоретико-числовых функций.

Теорема 2. *Пусть f и F – теоретико-числовые функции, такие, что*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Тогда для произвольного целого N справедливо

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) = \sum_{n=1}^{N} f(k)[N/k].$$

Непосредственным приложением теоремы к вычислению функций τ и σ являются следующие следствия.

Следствие 1. *Если N – положительное целое, то*

$$\sum_{n=1}^{N} \tau(n) = \sum_{n=1}^{N} [N/n].$$

Следствие 2. *Если N – положительное целое, то*

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma(n) = \sum_{n=1}^{N} n[N/n].$$