Лекция №8 (05.11.20)

5. Функция Эйлера и ее свойства.

5.1. φ-функция Эйлера.

Определение 1. *Для $n \geq 1$ обозначим за $\varphi(n)$ число положительных целых, не превышающих n и взаимно простых с n. Функция φ называется функцией Эйлера.*

Теорема 1. *Если p – простое и $k > 0$, то*

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

Лемма 1. *Пусть a, b, c – целые. НОД$(a, bc) = 1$ тогда и только тогда, когда НОД$(a, b) = 1$ и НОД$(a, c) = 1$.*

Теорема 2. *Функция Эйлера φ является мультипликативной.*

Теорема 3. *Если $n > 1$ имеет разложение на простые множители $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, тогда*

$$\varphi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2) \dots (1-1/p_r).$$

Теорема 4. *Для $n > 2$ значение $\varphi(n)$ является четным.*

5.2. Теорема Эйлера.

Лемма 2. *Пусть $n > 1$ и НОД$(a, n) = 1$. Если $a_1, a_2, \dots a_{\varphi(n)}$ – положительные целые, меньшие n и взаимно простые с n, то*

$$aa_1,\ aa_2,\ \dots,\ aa_{\varphi(n)}$$

являются сравнимыми по модулю n с $a_1, a_2, \dots a_{\varphi(n)}$ в некотором порядке.

Теорема 5 (Эйлера)**.** *Если n – положительное целое и НОД$(a,n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv \pmod{n}$.*

Следствие 1. *Если p – простое и $p \not| a$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

5.3. Некоторые свойства функции Эйлера.

Теорема 6 (Гаусса)**.** *Для положительного целового числа $n \geq 1$,*

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

Теорема 7. *Для $n > 1$ сумма положительных целых чисел, меньших n и взаимно простых с n, равна $\frac{1}{2}n\phi(n)$ или*

$$\frac{1}{2}n\phi(n) = \sum_{\substack{\gcd(k,n)\,=\,1 \\ 1\,\leq\,k\,<\,n}} k.$$

Теорема 8. *Для любого положительного числа n имеет место равенство:*

$$\phi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d)/d.$$