**Лекция №7**

# 4. Теоретико-числовые функции.

## 4.4. $\varphi$-функция Эйлера.

**Определение 1.** *Для $n \geq 1$ обозначим за $\varphi(n)$ число положительных целых, не превышающих $n$ и взаимно простых с $n$. Функция $\varphi$ называется функцией Эйлера.*

**Теорема 1.** *Если $p$ – простое и $k > 0$, то*

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

**Лемма 1.** *Пусть $a, b, c$ – целые. НОД$(a, bc) = 1$ тогда и только тогда, когда НОД$(a, b) = 1$ и НОД$(a, c) = 1$.*

**Теорема 2.** *Функция Эйлера $\varphi$ является мультипликативной.*

**Теорема 3.** *Если $n > 1$ имеет разложение на простые множители $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, тогда*

$$\varphi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\dots(1-1/p_r).$$

**Теорема 4.** *Для $n > 2$ значение $\varphi(n)$ является четным.*

## 4.5. Теорема Эйлера.

**Лемма 2.** *Пусть $n > 1$ и НОД$(a, n) = 1$. Если $a_1, a_2, \dots a_{\varphi(n)}$ – положительные целые, меньшие $n$ и взаимно простые с $n$, то*

$$aa_1,\ aa_2,\ \dots,\ aa_{\varphi(n)}$$

*являются сравнимыми по модулю $n$ с $a_1, a_2, \dots a_{\varphi(n)}$ в некотором порядке.*

**Теорема 5** (Эйлера)**.** *Если $n$ – положительное целое и НОД$(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

**Следствие 1.** *Если $p$ – простое и $p \not| a$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

## 4.6. Некоторые свойства функции Эйлера.

**Теорема 6** (Гаусса)**.** *Для положительного целового числа $n \geq 1$,*

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

**Теорема 7.** *Для $n > 1$ сумма положительных целых чисел, меньших $n$ и взаимно простых с $n$, равна $\frac{1}{2}n\phi(n)$ или*

$$\frac{1}{2}n\phi(n) = \sum_{\substack{\gcd(k,n)\,=\,1 \\ 1\,\leq\,k\,<\,n}} k.$$

**Теорема 8.** *Для любого положительного числа $n$ имеет место равенство:*

$$\phi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d)/d.$$