Практика № 2
17.09.19

1 Порождающие матрицы кода с повторением

На предыдущей практике мы показали два факта

1. Для кода, порожденного матрицей G в систематической форме $G = [I_k|A]$, справедливо $H = [-A^{\mathsf{t}}|I_{n-k}]$
2. Для $[n, 1, n]$ - кода с повторением, справедливо $G = [1 \dots 1]$, $H = [I_{n-1}|\mathbf{1}]$, где $\mathbf{1}$ - вектор длины $n-1$, состоящий из единиц.

Из факта 1 следует, что для кода с повторения проверочная матрица H' должна иметь вид

$$H' = [\ \mathbf{1}|I_{n-1}].$$

Покажите, что H и H' эквивалентны, то есть являются проверочными матрицами одного и того же кода.

2 Классы смежности

Докажите пункты 1–5 теоремы:

Теорема 1. Для $[n, k]_q-$ линейного кода C справедливо

1. $\forall u \in \mathbb{F}_q^n$ существует класс смежности C, содержащий u
2. $\forall u \in \mathbb{F}_q^n$ имеем $|C + u| = |C| = q^k$
3. $\forall u, v \in \mathbb{F}_q^n$ из $u \in C + v$ следует $C + u = C + v$
4. $\forall u, v \in \mathbb{F}_q^n$ либо $C + u = C + v$, либо $(C + u) \cap (C + v) = \emptyset$
5. Существует q^{n-k} различных классов смежности C.

3 Декодирование по таблице классов смежности

Для линейного кода C, заданного над $\mathbb{F}_3$ с порождающей матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. привести G к систематической форме
2. определить мин. расстояние кода
3. построить таблицу классов смежности и декодировать $y = (1\,1\,1\,1)$
4. построить таблицу синдромов

4 Декодирование бинарного кода Хэмминга

Бинарный код Хэмминга $[7, 4, 3]_2$ задаётся проверочной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Сколько ошибок может исправить этот код?
2. Построить таблицу синдромов для бинарного кода Хэмминга $[7, 4, 3]_2$. По полученному слову $y = (1\,1\,1\,0\,1\,1\,1)$, определить соответствующее кодовое слово и вектор ошибок
3. Для обобщенного кода Хэмминга $[n = 2^r - 1, k = 2^r - r - 1, 3]_2$, предложить алгоритм декодирования без построения таблицы синдромов, работающий за время $\mathcal{O}(n \lg n)$.