

Практика № 6
22.10.19

1 Альтернативное доказательство минимального расстояния кода Рида-Соломона

В этом упражнении мы докажем, что $d(\text{RS}_{\mathbb{F},S}(n, k)) = n - k + 1$.

1. Покажите, что умножение проверочной матрицы H любого линейного кода не меняет минимальное расстояние кода
2. Для ненулевых попарно различных (x_1, \dots, x_n) матрица Вандермонда – квадратная матрица $n \times n$, определённая

$$V = \text{Vand}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Покажите, что $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Для доказательства можете использовать формулу Лейбница: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$.

3. Проверочная матрица кода Рида-Соломона имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_1^{n-k} & \alpha_2^{n-k} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Используя тот факт, что минимальное расстояние кода есть наибольшее целое d , такое что, любые $(d - 1)$ столбцы H линейно независимы (см. лекцию №2), докажите справедливость равенства $d(\text{RS}_{\mathbb{F},S}(n, k)) = n - k + 1$.

2 Пример кода Рида-Соломона

Код Рида-Соломона $R_{\mathbb{F},S}(n, k)$ размерности $k = 4$ определён над $F = GF(3^2) = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 2)$. Обозначим α – корень $f(x) = x^2 + x + 2$ и положим $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^7\}$.

1. Каково минимальное расстояние $R_{\mathbb{F},S}(n, k)$?
2. Закодируйте сообщение $m = [2, 0, \alpha + 1, 1]$
3. Докажите, что $c = [2, 1, 2\alpha + 2, 0, \alpha, \alpha + 1, 2\alpha, \alpha + 2]$ принадлежит коду
4. Восстановите исходное сообщение по кодовому слову $c = [\star, 1, \star, 0, \alpha, \star, 2\alpha, \star]$, где \star обозначает, что символ кодового слова был стёрт.