

Практика № 3  
24.09.20

### 1 Граница Синглтона

Докажите, что для  $q > 1$ ,  $n, d \in \mathbb{N}$ , таких что  $1 \leq d \leq n$ , выполняется

$$A_q(n, d) \leq q^{n-d+1}.$$

### 2 Коды с максимальным расстоянием

Пусть  $C$ -линейный  $[n, k, d]$ -код с проверочной матрицей  $H$ . Докажите, что  $C$ -код с максимальным расстоянием тогда и только тогда, когда  $C^\perp$ -код с максимальным расстоянием.

### 3 Количество порождающих матриц

Покажите, что для  $[n, k]_q$ -линейного кода  $C$  ( $q$  – простое), количество различных порождающих матриц равно

$$\prod_{i=0}^{k-1} (q^k - q^i).$$

### 4 Альтернативное доказательство Теоремы 4

Пусть  $q$  - простое,  $n, k, d \in \mathbb{N}$ , такие что  $k \leq n - d + 1$ . Рассмотрим множество матриц над  $\mathbb{F}_q$  вида

$$H = [A | I_{n-k}] \in \mathbb{F}_q^{n-k \times n}$$

и зададим распределение на этом множестве через равномерное распределение над  $(n - k \times k)$  матрицами  $A$  над  $\mathbb{F}_q$ .

1. Докажите, что для любого ненулевого вектора  $y \in \mathbb{F}_q^n$

$$\Pr_{H \leftarrow \mathbb{F}_q^{n-k \times n}} [Hy = 0] = \begin{cases} 0, & \text{первые } k \text{ позиций } y \text{ нулевые} \\ q^{k-n}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что

$$\Pr_{H \leftarrow \mathbb{F}_q^{n-k \times n}} [H \text{ содержит } d-1 \text{ лин. завис. столбцов}] \leq \rho,$$

где

$$\rho = q^{k-n} \cdot \frac{\text{Vol}_q^n(d-1) - \text{Vol}_q^{n-k}(d-1)}{q-1}.$$