

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 1

Опубликовано 26.09.21, Срок сдачи: 10.10.21 (23:59)

Инструкция

1. Решения принимаются *исключительно* до дэдлайна, указанного в шапке ДЗ. Время сдачи указано в соответствии с Калининградским часовым поясом.
2. Решения должны быть выполнены индивидуально.
3. Решения должны быть написано разборчиво, все утверждения должны быть аргументированы.
4. Решения принимаются по электронной почте `elenakirshanova@gmail.com` с четкой пометкой, кто автор присланных решений.
5. Все решения должны быть оформлены в **один** файл формата pdf (не docx или jpg), которые должен иметь адекватное соотношение размер-качество (весь файл должен занимать не более 15Mb).

1 Код Адамара

Бинарный код Адамара, Had_r – это $[2^r, r]_2$ -код с порождающей матрицей $r \times 2^r$, столбцы которой представляют всевозможные битовые строки длины r . Докажите, что минимальное расстояние кода Had_r равно 2^{r-1} .

2 Линейные коды

Пусть C_1, C_2 – линейные коды длины n , заданные над \mathbb{F}_q порождающими матрицами G_1, G_2 . Определим следующие коды

- $C_3 = C_1 \cup C_2$
- $C_4 = C_1 \cap C_2$
- $C_5 = C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$
- $C_6 = \{(c_1 | c_2) : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$, где $(\cdot | \cdot)$ обозначает конкатинацию слов.

Для $i = 1, \dots, 6$ обозначим за k_i – размерность кода $\log_q |C_i|$, а за d_i – минимальное расстояние кода C_i . Положим $k_1, k_2 > 0$.

1. Докажите, что C_3 – линейный тогда и только тогда, когда либо $C_1 \subseteq C_2$, либо $C_2 \subseteq C_1$.
2. Докажите, что коды C_4, C_5, C_6 – линейные
3. Докажите, что если $k_4 > 0$, то $d_4 \geq \max\{d_1, d_2\}$

4. Докажите, что $k_5 \leq k_1 + k_2$, и что равенство достигается тогда и только тогда, когда $k_4 = 0$
5. Докажите, что $d_5 \leq \min\{d_1, d_2\}$
6. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

является порождающей матрицей для C_6 , а следовательно, $k_6 = k_1 + k_2$

7. Докажите, что $d_6 = \min\{d_1, d_2\}$.

3 Задача о заключенных

В тюрьме сидят семеро заключенных (в оригинальной версии задачи была темница и Минотавр, но мы цивилизованные люди). На всех заключенных надевают по одной шляпе либо красного, либо синего цвета так, что каждый заключенный видит цвета шляп других заключенных, но не свой.

В фиксированное время все заключенные декларируют свой выбор в надежде угадать цвет своей шляпы: либо 'красный', либо 'черный', либо 'пасс'. Заключенные не имеют права передавать друг другу какую-либо информацию ни в какое время.

Если все заключенные сказали 'пасс', они все остаются в тюрьме. Если хотя бы один из них не угадал свой цвет, они также все остаются в тюрьме. Если все заключенные, кто угадывал свой цвет, корректно его угадал (таковых должно быть как минимум 1), они все выходят на свободу.

Предложите и обоснуйте стратегию, в которой заключенные имеют вероятность $7/8$ выйти из тюрьмы. Объясните, как ваша стратегия связано с кодом Хэмминга $[7, 4, 3]$. Если бы заключенных было не 7, а 15, имели бы они БОльший успех на положительный для них исход?