БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ИММАНУИЛА КАНТА

ДНИ НАУКИ — 2014

Выпуск 1

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Издательство
Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта
2014

УДК 378(470.26):53:62:51
ББК 74.58(2Р31-4К)
22.3
3
22.1
Д548

Д548 **Дни науки — 2014** : сб. ст. — Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2014. — Вып. 1 : Физико-технические науки, математика и информационные технологии. — 98 с.

Представлены лучшие доклады студентов и аспирантов по итогам научно-практической конференции «Дни науки», прошедшей в 2014 г.

Предназначено студентам, аспирантам, а также широкому кругу специалистов, интересующихся идеями в области физико-технических наук, математики и информационных технологий.

УДК 378(470.26):53:62:51
ББК 74.58(2Р31-4К)
22.3
3
22.1

СОДЕРЖАНИЕ

Физико-технические науки

Математика и информационные технологии

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

А. В. Барзенков
(научный руководитель В. А. Барзенков, ст. преп.)

Разработка и внедрение комплексной системы управления доступом в сеть Интернет в общеобразовательном учреждении

Сеть Интернет используется в общеобразовательных учреждениях для решения различных информационных задач организации учебного процесса. Создает единое информационно-образовательное пространство, обеспечивающее пользователям доступ к отечественным и зарубежным источникам информации, позволяющее существенно улучшить формы открытого образования и возможности дистанционных технологий обучения. Очевидно, что сеть Интернет имеет как положительное значение в деятельности общеобразовательных учреждений, так и выступает потенциальной угрозой [1].

От других организаций общеобразовательные учреждения отличаются тем, что пользователями сети Интернет в них являются не только сотрудники (административно-хозяйственный персонал, педагогические работники), но и ученики. Доступ учеников к определенным категориям информации должен быть ограничен согласно Федеральному закону Российской Федерации от 29 декабря 2010 года №436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».

В настоящее время общеобразовательные учреждения подключены к единой системе контентной фильтрации, созданной Министерством образования и науки РФ. Однако у данной системы существуют недостатки, к которым относятся некачественная фильтрация (разрешение доступа к интернет-ресурсам, который должен быть ограничен из-за несовершенных алгоритмов фильтрации), ограничение доступа к незапрещенной информации из-за излишней фильтрации трафика и возможность обхода фильтрации (использование прокси-серверов, туннелирования).

нениями (1), антисимметричностью внешнего произведения, а также возможностью заменять внутренние индексы, продифференцируем внешним образом уравнения (2): $D\omega^\alpha = d\Lambda_i^\alpha \wedge \theta^i + \Lambda_i^\alpha D\theta^i$. В результате получим $(d\Lambda_i^\alpha + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_j^\alpha \theta_i^j) \wedge \theta^i = 0$. Воспользуемся леммой Картана:

$$d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \theta_i^j + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \tag{3}$$

Причем $\Lambda_{[ij]}^\alpha = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ji}^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha$. Уравнения (3) запишем с помощью оператора Δ:

$$\Delta\Lambda_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j. \tag{3`}$$

Утверждение 1. Совокупность коэффициентов Λ_i^α, называемая фундаментальным объектом 1-го порядка отображения *f*, является тензором.

Утверждение 2. Обращение фундаментального тензора в нуль $\Lambda_i^\alpha = 0$ приводит к вырождению отображения f: $V_m \to y \in M_n$.

2.2. Дифференциальные уравнения для коэффициентов Λ_{ij}^α.

Продолжения структурных уравнений (1) имеют вид:

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta^k \wedge \theta_{jk}^i,\ \theta_{[jk]}^i \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \theta^i), \tag{4}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha,\ \omega_{[\beta\gamma]}^\alpha \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha). \tag{5}$$

Чтобы найти дифференциальные уравнения для коэффициентов Λ_{ij}^α, продифференцируем уравнение (3):

$$(d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \theta_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \theta_i^k - \Lambda_k^\alpha \theta_{ij}^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha + \Lambda_i^\beta \Lambda_j^\gamma \omega_{\beta\gamma}^\alpha) \wedge \theta^j = 0.$$

По лемме Картана имеем:

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_k^\alpha \theta_{ij}^k + \Lambda_i^\beta \Lambda_j^\gamma \omega_{\beta\gamma}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \theta^k, \tag{6}$$

причем $\Lambda_{i[jk]}^\alpha = 0$, то есть $\Lambda_{ijk}^\alpha = \Lambda_{ikj}^\alpha$, а по остальным нижним индексам функции Λ_{ijk}^α, вообще говоря, не симметричны.

Утверждение 3. Функции Λ_i^α, Λ_{ij}^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3), (6) и составляют фундаментальный объект 2-го порядка $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ij}^\alpha\}$ отображения *f*, который является квадратичным геометрическим объектом.

Известно [2], что при выводе формулы (4) по лемме Лаптева в голономном случае $\theta_{[ij]}^k = 0$. Если, кроме того, положить $\omega_{[\beta\gamma]}^\alpha = 0$, то есть рассматривать голономное гладкое многообразие M_n[3], то $\Delta\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0$ и по формуле (6): $\Lambda_{[ij]k}^\alpha \omega^k = 0 \Rightarrow \Lambda_{[ij]k}^\alpha = 0$.

Теорема. Если при отображении f: $V_m \to M_n$ гладкие многообразия V_m и M_n голономны, то компоненты Λ_{ijk}^α фундаментального объекта 3-го порядка $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{ijk}^\alpha\}$ симметричны по всем нижним индексам.

Список литературы

1. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps. 2004.

2. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

Н.С. Колесников

(научный руководитель С.И. Алешников, канд. техн. наук, доцент)

Исследование некоторых локальных свойств плоских алгебраических кривых в сингулярных точках

Введение

Теория пересечений — раздел алгебраической геометрии, изучающий алгебраические многообразия, полученные в результате пересечения конечного числа многообразий. Особое значение среди них имеют гиперповерхности $V(F)\subset\mathbb{A}^2(k)$, определяемые неприводимыми многочленами $F\in k[X,Y]$ (k — некоторое алгебраически замкнутое поле), — аффинные плоские кривые. Поставим задачу изучения кратных точек аффинных плоских кривых, то есть локальных свойств плоских кривых в особых точках, а также определим число пересечений двух плоских кривых.

Важнейшим инструментом исследования числа пересечений двух кривых в точке является теорема Безу (1779). Она позволяет точно находить число общих точек двух плоских кривых. Приведем пример нахождения числа пересечений двух кривых в точке и дадим ему геометрическую интерпретацию.

Кратные точки и касательные

Определения. Пусть F — плоская кривая в $\mathbb{A}^2(k)$. Точка $P=(a,b)\in F$ называется простой точкой, если хотя бы одна из частных производных в этой точке $F_X'(P)$, $F_Y'(P)$ отлична от 0. В этом случае прямая $F_X'(P)\cdot(X-a)+F_Y'(P)\cdot(Y-b)=0$ называется касательной к F в точке P. Точка, которая не является простой, называется сингулярной (кратной).

Очевидно, что если $P=(0,0)$ — кратная точка F, то F не имеет линейных членов. В этом случае сгруппируем мономы из F, имеющие одинаковые степени, и представим F в виде суммы однородных многочленов: $F=F_m+F_{m+1}+\ldots+F_n$, $\deg F_i=i$. Тогда касательные в точке P есть прямые L_i, определяемые формой наименьшей степени $F_m=\prod L_i^{r_i}$, а число m называется кратностью точки P. Число r_i называется кратностью касательной L_i.

Пример. Рассмотрим кривую $F=Y^2-X^3-X^2$ в $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Найдем все ее кратные точки, кратности этих точек, касательные и определим вид кривой.

$$Y^2-X^3-X^2=0\Leftrightarrow Y^2=X^2+X^3\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ действительная часть кривой $F\cap\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ симметрична относительно оси OX. Схематично изобразим ее на рисунке 1.

$$\begin{cases} F_X'=-3X^2-2X, \\ F_Y'=2Y. \end{cases}$$

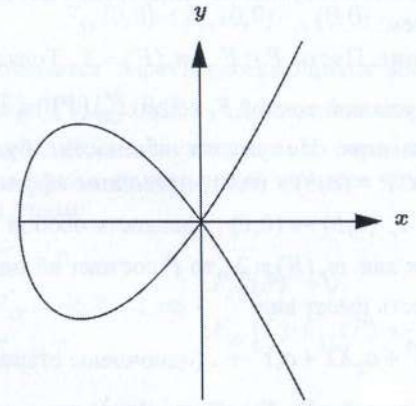

Рис. 1. $F\cap\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Для нахождения кратных точек приравниваем к 0 частные производные:

$$\begin{cases} -3X^2-2X=0 \\ 2Y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} X\cdot(3X+2)=0 \\ Y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} X=0,\ Y=0 \\ X=\frac{2}{3},\ Y=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} P_1=(0,0) \\ P_2=(\frac{2}{3},0) \end{array}\right.$$

$$P_2=(\frac{2}{3},0)\notin V(F),$$

Так как $F(\frac{2}{3},0)\neq 0$; $P_1=(0,0)\in V(F)\Rightarrow P=(0,0)$ — единственная кратная точка кривой F. Так как наименьшие по степени мономы, входящие в многочлен F, имеют степень 2 ($F_2=Y^2-X^2$), то кратность особой точки $m_{(0,0)}(F)=2$, а пара пересекающихся прямых $F_2 = Y^2 - X^2 = 0$ и будет являться касательными к F в точке (0,0). $L_1 = Y - X$, $L_2 = Y - X$, следовательно, кратность каждой касательной равна 1.

Рассмотренная точка кратности 2, в которой кривая имеет две несовпадающие касательные, называется узлом. Узловую точку можно найти, воспользовавшись следующим необходимым и достаточным условием:

Предложение. Пусть $P \in F$, $m_P(F) = 2$. Точка P тогда и только тогда является узловой точкой F, когда $F^{'}_{XY}(P)^2 \neq F^{'}_{XX}(P) \cdot F^{'}_{YY}(P)$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $P = (0,0)$ (если $P = (a,b) \neq (0,0)$, применим аффинное преобразование координат T, $(a,b) \mapsto (0,0)$, кратность особой точки от этого не изменится). Так как $m_P(F) = 2$, то F состоит из одночленов степени не менее 2, то есть имеет вид:

$$F(X,Y) = a_1X^2 + a_2XY + a_3Y^2 + \text{...(одночлены старших степеней)} \quad (1)$$

Запишем разложение F как функции двух переменных в ряд Тейлора в окрестности точки (0,0) (формула Маклорена):

$$F(X,Y) = \frac{\partial^2 F(0,0)}{2\partial X^2}X^2 + \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial X \partial Y}XY + \frac{\partial^2 F(0,0)}{2\partial Y^2}Y^2 + \text{... (одночлены старших степеней)}$$

$$F(X,Y) = \frac{1}{2}F^{'}_{XX}(0,0)X^2 + F^{'}_{XY}(0,0)XY + \frac{1}{2}F^{'}_{YY}(0,0)Y^2 + ... \quad (2)$$

Для того чтобы точка P оказалась узлом, необходимо и достаточно, чтобы касательные, определяемые членами 2-й степени в (2) не совпадали между собой. Так, следующее уравнение, рассматриваемое относительно неизвестной Y или X (переменные равноправны), должно иметь два различных решения.

$$\frac{1}{2}F^{'}_{XX}(0,0)X^2 + F^{'}_{XY}(0,0)XY + \frac{1}{2}F^{'}_{YY}(0,0)Y^2 = 0.$$

Будем решать это уравнение как квадратное относительно X:

$$\mathcal{D} = 4X^2F^{'}_{XY}(0,0) - 4F^{'}_{YY}(0,0)F^{'}_{XX}(0,0)X^2 \neq 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^{'}_{XY}(0,0) \neq F^{'}_{YY}(0,0)F^{'}_{XX}(0,0).$$

Отметим, что в случае $\mathcal{D} < 0$, то есть

$$F^{'}_{XY}(0,0) < F^{'}_{YY}(0,0)F^{'}_{XX}(0,0),$$

касательными окажется пара пересекающихся мнимых прямых, а при $F^{'}_{XY}(0,0) > F^{'}_{YY}(0,0)F^{'}_{XX}(0,0)$ — действительных. Тем не менее, в обоих случаях точка (0,0) является узлом по определению. ■

Легко видеть, что в приведенном примере точка (0,0) действительно является узлом:

$$\begin{cases} F^{'}_{XY} = 0 \\ F^{'}_{XX} = -6X - 2 \\ F^{'}_{YY} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F^{'}_{XY}(P)^2 = 0 \\ F^{'}_{XX}(P) \cdot F^{'}_{XY}(P) = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{'}_{XY}(P)^2 \neq F^{'}_{XX}(P) \cdot F^{'}_{YY}(P). \blacksquare$$

Числа пересечений

Определение. Пусть даны плоские кривые $F(X,Y) = 0$ и $G(X,Y) = 0$, $P \in \mathbb{A}^2(k)$. Определим кратность пересечения F и G в точке P $I(P, F \cap G)$ как целое неотрицательное число (или ∞, если F и G имеют общую компоненту), удовлетворяющее свойствам:

— $I(P, F \cap G) = 0 \Leftrightarrow P \notin F \cap G$ (3.1)

— $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$ (3.2)

— $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap GH)$, $\forall H \in k[X,Y]$ (3.3)

— $I(P, F \cap GH) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H)$ (3.4)

— $I(P, F \cap G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G)$ (3.5)

— $I(P, F \cap G)$ инвариантно относительно аффинного преобразования координат в $\mathbb{A}^2(k)$. (3.6)

Можно доказать, что удовлетворяющее всем указанным свойствам число пересечений $I(P, F\cap G)$ существует, единственно, и кроме того, может быть вычислено по формуле

$$I(P,F\cap G)=\dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F,G)). \quad (4)$$

Предложение. Опишем алгоритм нахождения числа $I(P,F\cap G)$, удовлетворяющего всем свойствам (3.1)—(3.6). Для начала проверим условие (3.1). Если после этого $I(P,F\cap G)\neq 0$, находим $F(X,0), G(X,0)\in k[X]$. Обозначим степени $F(X,0)$ и $G(X,0)$ через r и s соответственно. Будем считать $r\le s$. Возможны два случая:

1. $r=0 \Rightarrow Y\mid F \Rightarrow F=YH$. По свойству (3.4),

$$I(P,F\cap G)=I(P,Y\cap G)+I(P,H\cap G).$$

Если $G(X,0)=X^m(a_0+a_1X+...)$, $a_0\neq 0$, находим $I(P,Y\cap G)$:

$$I(P,Y\cap G)\overset{(3.3)}{=}I(P,Y\cap G(X,0))\overset{(3.4),(3.1)}{=}I(P,Y\cap X^m)\overset{(3.5)}{=}m.$$

Так как $P\in G$, $m>0 \Rightarrow I(P,H\cap G)<n$ и может быть вычислено по алгоритму.

2. $r>0$. Будем считать, что $F(X,0)$ и $G(X,0)$ — приведенные. В этом случае выбираем $H=G-X^{s-r}F$. Тогда по свойству (3.3), $I(P,F\cap G)=I(P,F\cap H)$, где $\deg(H(X,0))=t<s$. Таким образом, удалось понизить степень одной из кривых. Через конечное число шагов придем к случаю 1. ■

Предложение. Можно доказать, что равенство в свойстве (3.5) достигается тогда и только тогда, когда все касательные в точке P к кривым F и G различны.

В частности, если L — касательная к F в точке P, $m=m_P(F) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \deg L=1$, и касательные в точке P к кривым F и L совпадают $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ По свойству (3.5) и предложению, $I(P,F\cap L)>m$.

Пример. Проиллюстрируем алгоритм нахождения числа пересечений на примере.

Пусть $F(X,Y)=Y^3+X$, $G(X,Y)=X^3+Y^2$, $P=(0,0)$.

$F(X,0)=X$, $r=\deg F(X,0)=1$

$G(X,0)=X^3$, $s=\deg G(X,0)=3$.

$r=1>0\Rightarrow$ строим многочлен H:

$H=G(X,Y)-X^{s-r}F(X,Y)=X^3+Y^2-X^2(Y^3+X)=Y^2-X^2Y^3.$

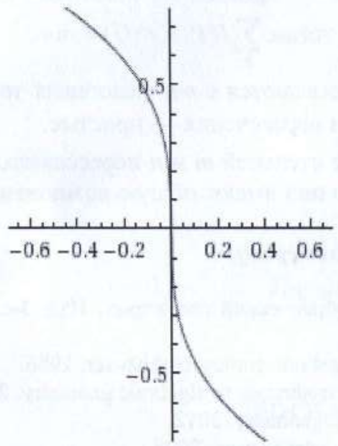

Рис. 2. $F\cap\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

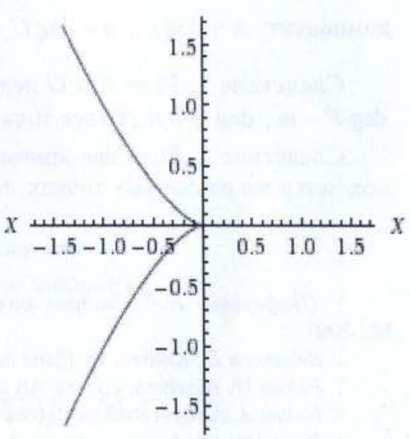

Рис. 3. $G\cap\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Теперь

$$\deg(H(X,0))=0,$$

$$I(P,F\cap G)\overset{(3.3)}{=}I(P,F\cap H)=I(P,Y^2(1-XY)\cap G)=$$

$$\overset{(3.4)}{=}I(P,F\cap Y^2)+I(P,F\cap(1-XY))=0+2=2.$$

Здесь $I(P,(Y^3+X)\cap Y^2)\overset{(3.3)}{=}2I(P,Y\cap Y^3+X)=2I(P,Y\cap X)=2.$

$I(P,F\cap(1-XY))\overset{(3.1)}{=}0$, так как $P=(0,0)\notin(1-XY)$.

Итак, кратность пересечения $I(P, F \cap G) = 2$. Геометрически это означает, что число всех касательных к $V(F) \cup V(G)$ равно 2 с учетом их кратностей.

Отметим, что для проективных плоских кривых кратность пересечений легче находить, используя теорему Безу. Сформулируем саму теорему и два следствия из нее, полезных в вычислениях.

Теорема. Пусть $F, G \subset \mathbb{P}^2(k)$ — кривые, не имеющие общих компонент, $m = \deg F$, $n = \deg G$, тогда $\sum_P I(P, F \cap G) = mn$.

Следствие 1. Если F и G пересекаются в mn различных точках, $\deg F = m$, $\deg G = n$, то все точки пересечения — простые.

Следствие 2. Если две кривые степеней m и n пересекаются более, чем в mn различных точках, то они имеют общую компоненту.

Список литературы

1. *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. Изд. 3-е, доп. М., 2007.
2. *Brieskorn E., Knörrer H.* Plane algebraic curves. Birkhäuser, 1986.
3. *Fulton W.* Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. 2008.
4. *Holme A.* A royal road to algebraic geometry. 2012.
5. *Perrin D.* Algebraic geometry. An introduction. 2008.

Научное издание

ДНИ НАУКИ — 2014

Выпуск 1

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Редактор *И. О. Палиенко*. Корректор *В. В. Крупко*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 21.12.2014 г.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 6,3
Тираж 100 экз. (1-й завод — 20 экз.). Заказ 041

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236022, г. Калининград, ул. Гайдара, 6