Симметричные каналы.

ОПР. Канал связи $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ называется:

- симметричным по входу, если все строки матр. $\pi_{q\times s}$ явл. перестановками одного и того же набора чисел $\pi_1', \dots, \pi_s'$;
- симметричным по выходу, если все столбцы матр. $\pi_{q\times s}$ явл. перестановками одного и того же набора чисел $\pi_1'', \dots, \pi_q''$.
- симметричным, если он одновременно симметр. по входу и выходу.

Утв. Если канал связи симметричен по входу, то

$$C^* \le \log_2 s + \sum_{i=1}^{s} \pi_i' \log_2 \pi_i'$$

Д-во. т.к. $|\mathcal{Y}| = s$, то по св-вам энтропии, $H(Y) \le \log_2 s$, причем рав-во достиг. $\Leftrightarrow$ Y распред. равномерно: т.е. выходное распред. $\vec{v} = (1/s, \dots, 1/s)$.

т.к. канал связи симметричен по входу,

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s} u_i \pi_{ij} \log_2 \pi_{ij} = -\sum_{i=1}^{q} u_i \sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} \log_2 \pi_{ij} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{q} u_i \sum_{j=1}^{s} \pi_j' \log_2 \pi_j' = -\sum_{j=1}^{s} \pi_j' \log_2 \pi_j' \underbrace{\sum_{i=1}^{q} u_i}_{1}$$

$$C^* \le I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = \dots$$

ч.т.д.

Утв. Если канал связи симметричен по выходу, то равномерному распред. $\vec{u} = \left(\frac{1}{q}, \dots, \frac{1}{q}\right)$ на входе соответств. равномерное распред. $\vec{v} = \left(\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}\right)$ на выходе.

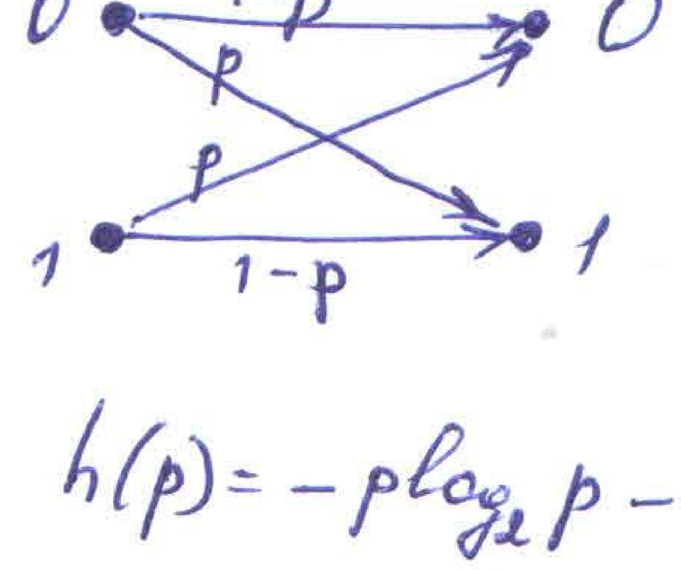
Д-во. Для $1 \le j \le s$

$$v_j = \sum_{i=1}^{q} u_i \pi_{ij} \overset{\text{из усл.}}{=} \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \pi_{ij} \overset{\text{сим. по выходу}}{=} \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \pi_i'' \Rightarrow v_j = \frac{1}{s}, \text{ т.к. } v_j \text{ не завис. от } j.$$

Следствие. Если канал связи симметричен, то

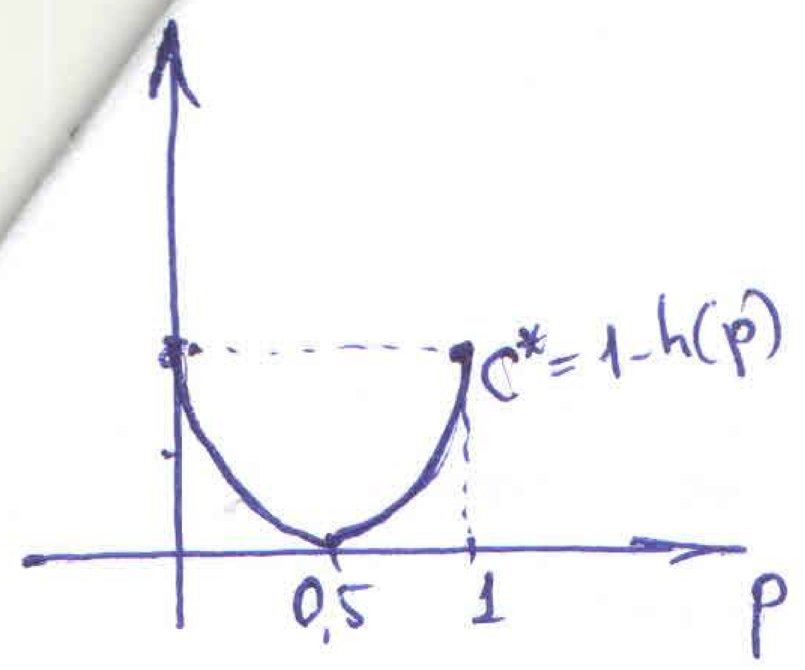
$$C^* = \log_2 s + \sum_{i=1}^{s} \pi_i' \log \pi_i'.$$

Пример. ДСК(p) (двоичн. симметрич. канал) $\quad \pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$



$$C^* = \log_2 s + \sum_{i=1}^{s} \pi_i' \log \pi_i' = \log_2 2 +$$

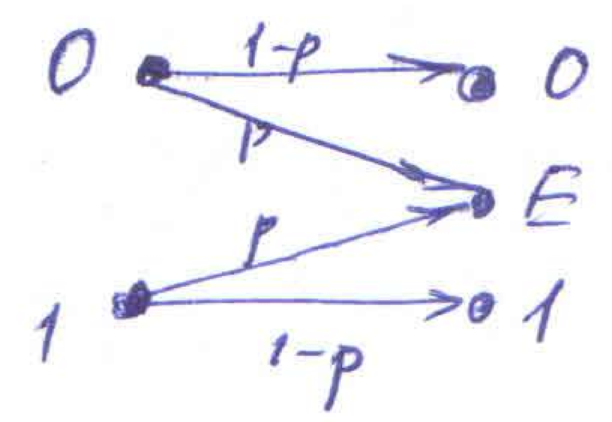
$$+ p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p) = 1 - h(p), \text{ где } h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p).$$



Пример 2. Двоичный канал со стиранием:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

сим. по входу
несим. по выходу



$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ $(q=2)$ $\quad \mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$ $(s=3)$

$\exists\ \vec{u} = (\alpha, \beta)$ – входное распределение X.

Для канала, симметр. по входу, из док-ва [Утв.],

$H(Y|x) = H(1-p, 0, p) = h(p)$ – не завис. от $\vec{u}$. $\qquad h(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$

Вых. распределение: $\vec{v} = \vec{u}\cdot\pi = (\alpha\ \beta)\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix} = ((1-p)\alpha\ \ p\ \ (1-p)\beta)$

$$\max H(\vec{v}) = H(\vec{v})\Big|_{\alpha=\beta=\frac{1}{2}} = H\left(\frac{1-p}{2}\ \ p\ \ \frac{1-p}{2}\right) = -(1-p)\log_2\frac{1-p}{2} - p\log_2 p =$$

$$= -(1-p)\log_2(1-p) + (1-p) - p\log_2 p = h(p) + 1 - p.$$

$$C^* = H\left(\frac{1-p}{2}\ \ p\ \ \frac{1-p}{2}\right) - h(p) = 1 - p.$$

Соединение каналов

Опр. $\exists$ Даны два канала связи без памяти $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \pi_1)$ и $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \pi_2)$.
$q_i = |\mathcal{X}_i|$ $\quad s_i = |\mathcal{Y}_i|$ $\quad i = \overline{1,2}$. Тогда канал связи $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ называется:

- Последовательным соединением каналов, если $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{X}_2$ и $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$
- Параллельным соединением каналов, если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ $\quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$
  перехор. вероятности $\pi((y_1, y_2)|(x_1, x_2)) = \pi_1(y_1|x_1)\cdot\pi_2(y_2|x_2)$
- Суммой каналов, если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$, $\quad \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \varnothing$
  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$, $\quad \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \varnothing$

Матрица π имеет блочный вид: $\quad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{pmatrix}$

Послед. соединение:

$$P(Y_2 = z_k | X_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{s_1} P(Y_2 = z_k | X_2 = y_j)\cdot P(Y_1 = y_j | X_1 = x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s_1} \pi_1(y_j|x_i)\cdot\pi_2(z_k|y_j)$$

Будем обозначать: C^* – пропускн. способность послед. соед. / парал. / суммы каналов с пропускн. способн. C_1^*, C_2^*.

(П) Теорема. Если канал св. $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ явл. последовательным соед. каналов $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \pi_1)$ и $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \pi_2)$, то справедливо

$$C^* \leq \min\{C_1^*, C_2^*\}$$

Д-во: (*) $I(X_1; (Y_1, Y_2)) = I(X_1; Y_2) + I(X_1; Y_1 | Y_2) = I(X_1, Y_1) + I(X_1; Y_2 | Y_1)$ – по св-вам I;

$$P(Y_2 = z_k | X_1 = x_i, Y_1 = y_j) = \frac{P(X_1 = x_i) \cdot \pi_1(y_j | x_i)\, \pi_2(z_k | y_j)}{P(X_1 = x_i) \cdot \pi_1(y_j | x_i)} = \pi_2(z_k | y_j) =$$

$$= P(Y_2 = z_k | Y_1 = y_j)$$

Y_2 при усл. Y_1 не завис. от X_1.
Следовательно, $I(X_1; Y_2 | Y_1) = 0$

$I(X_1; Y_1 | Y_2)$ – по св-вам I.
Подставляя в (*), получим:

$$I(X_1; Y_2) \leq I(X_1; Y_1)$$

Поменяем местами X_1 и Y_2 в (*):

(**) $$I(Y_2; (X_1, Y_1)) = I(X_1; Y_2) + I(Y_1; Y_2 | X_1) = I(Y_1; Y_2) + I(X_1; Y_2 | Y_1)$$

Теперь получим

$$I(X_1; Y_2) \leq I(Y_1; Y_2)$$

Из двух выведенных неравенств следует, что

$$I(X_1; Y_2) \leq \min\{I(X_1, Y_1), I(Y_1, Y_2)\} \leq \min\{C_1^*, C_2^*\}$$

что.

(П) Теорема. Если $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ явл. параллельным соединением каналов $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \pi_1)$ и $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \pi_2)$, то

$$C^* = C_1^* + C_2^*$$

(П) Теорема. Если $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ – сумма двух каналов св. $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \pi_1)$ и $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \pi_2)$, то

$$2^{C^*} = 2^{C_1^*} + 2^{C_2^*}.$$