Теорема кодирования дискр. каналов без памяти

Лекция 11.
27.04.21г.

] $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ - конеч. множества, $n \geq 1$,
$(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n, \pi^{(n)})$ — канал связи.
X^n - случ. вектор на входе канала связи, Y^n - случ. вектор на выходе кан. связи

ОПР. Произвольное подмнож. $\mathcal{C} = \{x^n(1), \dots, x^n(M)\} \subseteq \mathcal{X}^n$ наз. кодом длины n и объема M, сост. из кодовых слов $x^n(i) = (x_1(i), \dots, x_n(i))$, $1 \le i \le M$.

Предположим, что по каналу связи передаются только код. слова кода $\mathcal{C}$. $\Rightarrow \Pi_{1\dots n}(x^n) = 0$, если $x^n \in \mathcal{X}^n \setminus \mathcal{C}$.
т.е. X^n сосредоточено на коде $\mathcal{C}$.

ОПР. Скорость передачи инф. по каналу связи $(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n, \pi^{(n)})$ будем назыв. величину

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot H(X^n)$$

среднее колич. инф. на 1 символ код. слова.

Замеч.: если $\Pi_{1\dots n}$ — равномерно на $\mathcal{C} \Rightarrow R_n = \frac{\log_2 M}{n}$

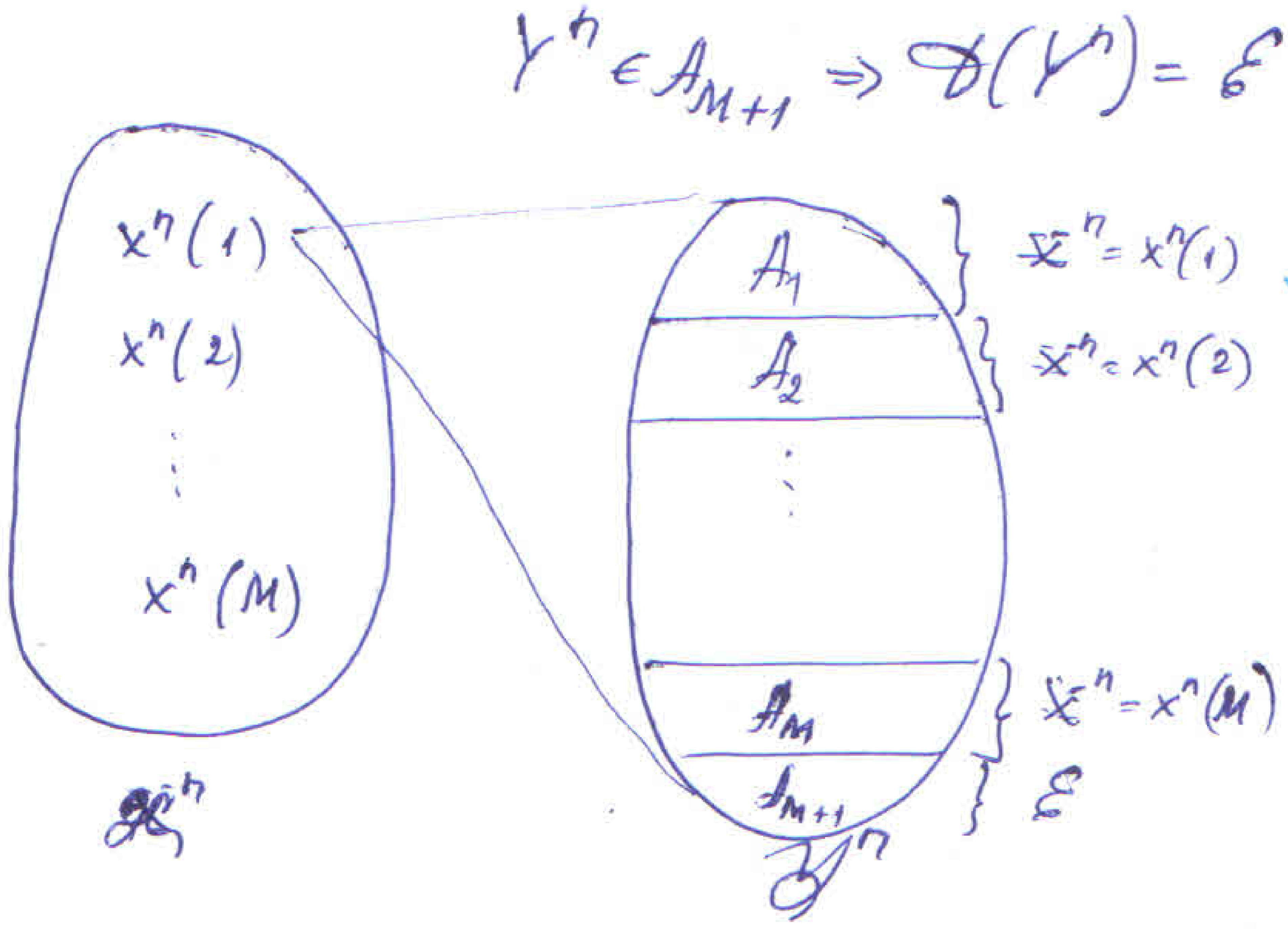
ОПР.] $\mathcal{Y}^n = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_M \sqcup A_{M+1}$ — произвольное разбиение $\mathcal{Y}^n$ на $M+1$ непересек. подмножеств. A_i - наз. областями декодера.

Множ. решений

$W = \mathcal{C} \cup \{\varepsilon\}$ — $\mathcal{C}$: кодовое слово; ε: символ невозмож. декодир-я

Декодером общего вида наз произвольное отображ. $\phi: \mathcal{Y}^n \to W$

Если случ. вектор $Y^n \in A_i$ $(1 \le i \le M) \Rightarrow \phi(Y^n) = x^n(i)$;
$Y^n \in A_{M+1} \Rightarrow \phi(Y^n) = \varepsilon$ - невозможно декодир.



ОПР.] $X^n = x^n(i) \in \mathcal{C}$ $(1 \le i \le M)$ и $Y^n = y^n \in A_j$ $(1 \le j \le M+1)$

Если $i=j$ гов., что сообщ. Y^n декодировано верно, если $i \ne j \Rightarrow$ ошибка декодирования.

Замеч. Введем множ. $\mathcal{E} = \bigcup_{i \neq j} \left(\{x^n(i)\} \times A_j \right) \subseteq \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$

Тогда ошибочное декодир. означает, что
$(X^n, Y^n) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \Phi(Y^n) \neq X^n$.

] Задан канал связи $(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n, \pi^{(n)})$; $C \subseteq \mathcal{X}^n$ и Φ-декодер.
Хотим: вероятность ошибочного декодир-я $\longrightarrow \min$.

<u>ОПР.</u> Условной вероятностью ошибочного декодир-я при условии передачи код. слова $X^n = x^n(i)$, наз. величина

$$\lambda_i := P\Big(\underbrace{(X^n, Y^n) \in \mathcal{E}}_{\text{ошибка декодера}} \;\Big|\; X^n = x^n(i) \Big)$$

Средней вероятностью ошибочного декодир-я наз. величина
$\lambda := P\big((X^n, Y^n) \in \mathcal{E}\big)$

Замечание. Будем писать Φ_n и $\lambda^{(n)}$, указывая на зависимость этих величин от n-длины кодов. слова.

<u>УТВ.</u> (1) $\lambda_i = 1 - \sum\limits_{y^n \in A_i} \pi^{(n)}(y^n \mid x^n(i))$

(2) $\lambda = 1 - \sum\limits_{i=1}^{M} P_n(x^n(i)) \sum\limits_{y^n \in A_i} \pi^{(n)}(y^n \mid x^n(i))$

Д-во. $P\big(\Phi(Y^n) = x^n(j) \mid X^n = x^n(i)\big) = \sum\limits_{y^n \in A_j} \pi^{(n)}(y^n \mid x^n(i))$
— по опред. множ. A_i

Преобразуем формулу условной вер. ошибочного декодир-я:

$$\lambda_i = P\big((X^n, Y^n) \in \mathcal{E} \mid X^n = x^n(i)\big) = 1 - P\big(\Phi(Y^n) = x^n(i) \mid X^n = x^n(i)\big) =$$
$$= 1 - \sum_{y^n \in A_i} \pi^{(n)}(y^n \mid x^n(i))$$

По формуле полной вероятности:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i P_n(x^n(i)) = 1 - \sum_{i=1}^{M} P_n(x^n(i)) \cdot \sum_{y^n \in A_i} \pi^{(n)} \cdot (y^n \mid x^n(i))$$

<u>чтд.</u>

Напомним: $\underset{(\text{знач. } x^n)}{X^n} \xrightarrow{\text{канал св.}} \underset{(\text{знач. } y^n)}{Y^n}$

$$\pi^{(n)}(y^n \mid x^n) = P(Y^n = y^n \mid X^n = x^n)$$

$$P(Y^n = y^n) = \sum_{x^n \in C} \mathcal{U}_{1\ldots n}(x^n) \cdot \pi^{(n)}(y^n \mid x^n).$$

Обознач.: $\lambda_{min} := \min\limits_{1 \le i \le M} \lambda_i \qquad \lambda_{max} := \max\limits_{1 \le i \le M} \lambda_i$.

Пример 1. Декодер Φ_L по методу макс. правдоподобия.

$\Phi_L(y^n) = x^n$, т.ч. $\pi^{(n)}(y^n|x^n) = \max$ для всех $x^n \in \mathcal{C}$.

Если несколько код. слов x^n удовл. этому условию $\Rightarrow$ выбираем меньшее по лексикографич. порядку.

Пример 2. Декодер Φ_{AP} по методу макс. апостериорной вероятности.

Если $P(Y^n = y^n) > 0$, то определена апостериорная вероятность:

$$P(X^n = x^n \mid Y^n = y^n) = \frac{U_{1..n}(x^n) \cdot \pi^{(n)}(y^n|x^n)}{\sum\limits_{z^n \in \mathcal{C}} U_{1..n}(z^n) \cdot \pi^{(n)}(y^n|z^n)}$$

априорная вероятность $P(X^n = x^n)$ – из распред. X^n

$\Phi_{AP}(y^n) = x^n$, т.ч. $P(X^n = x^n \mid Y^n = y^n) = \max$ для всех $x^n \in \mathcal{C}$.

Замечание. Φ_L не зависит от распред. $U_{1..n}(x^n)$.

Φ_L – зависит только от кода и канала связи.

<u>Утв.</u> Φ_{AP} обеспечивает минимальную среднюю вероятность λ ошибочного декодирования.

Д-во. $(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n, \pi^{(n)})$ – канал. св., $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}^n$ – код;

Φ – декодер с решающими областями $A_1, \dots, A_{M+1}$.

Обозначим $P(y^n) = P(Y^n = y^n)$, $P(x^n|y^n) = P(X^n = x^n \mid Y^n = y^n)$.

Преобразуем среднюю вероятность правильного декодирования:

$$1 - \lambda = P(\Phi(Y^n) = X^n) = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} P(y^n) \cdot P(\Phi(Y^n) = X^n \mid Y^n = y^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{y^n \in A_i} P(y^n) \cdot P(x^n(i) \mid y^n)$$

$1 - \lambda = \max \Leftrightarrow \forall A_i \ (1 \le i \le M)$ сост. из векторов y^n, для кот.

$P(x^n(i) \mid y^n) \ge P(x^n(j) \mid y^n) \ \forall j \ne i \ \ 1 \le j \le M$.

– по опред. декодера Φ_{AP}

<u>Опр.</u> Два декодера Φ_1 и Φ_2 наз. эквивалентными, если $\forall y^n \in \mathcal{Y}^n$ справедливо: $\Phi_1(y^n) = \Phi_2(y^n)$

<u>Утв.</u> Если распред. $U_{1..n}(x^n)$ – равномерное, то декодеры Φ_L и Φ_{AP} эквивалентны.

Д-во. $$P(X^n = x^n \mid Y^n = y^n) = \frac{\pi^{(n)}(y^n|x^n)}{\sum\limits_{z^n \in \mathcal{C}} \pi^{(n)}(y^n|z^n)}$$

числитель $\to$ max достигается при $\pi^{(n)}(y^n|x^n) = \max$.

знаменатель $\to$ не завис. от x^n