Лекция №2 — 26.01, 2021

1 Свойства энтропии

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log_2 p_i$$

1. Энтропия $H(A) \geq 0$ неотрицательна и равна 0 тогда и только тогда, когда одна из вероятностей равна 1, а все остальные равны 0 (вырожденное распределение).
2. Если дискретная случайная величина A принимает m различных значений, то ее энтропия $H(A) \leq \log_2 m$.
3. Энтропия достигает максимального значения, когда случайная величина распределена равномерно, т.е. $p_1 = \ldots = p_m = \frac{1}{m}$.

2 Совместная энтропия и ее свойства

Пусть A, B - дискретные случайные величины, которые имеют распределения соответственно:

a_1	a_2	$\ldots$	a_m
$p_A(a_1)$	$p_A(a_2)$		$p_A(a_m)$

b_1	b_2	$\ldots$	b_m
$p_B(b_1)$	$p_B(b_2)$		$p_B(b_m)$

Определение. Энтропией совместного распределения (совместной энтропией) случайных величин A и B называется величина

$$H(A, B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{AB}(a_i, b_j) \log_2 p_{AB}(a_i, b_j)$$

1. $H(A, B) = H(A) + H(B)$, если величины A и B независимы.
2. (полуаддитивность)
   $H(A_1, A_2, \ldots, A_n) \leq H(A_1) + H(A_2) + \ldots + H(A_n)$

3 Условная энтропия

Пусть A, B - дискретные случайные величины, которые имеют распределения соответственно:

a_1	a_2	$\dots$	a_m
$p_A(a_1)$	$p_A(a_2)$		$p_A(a_m)$

b_1	b_2	$\dots$	b_m
$p_B(b_1)$	$p_B(b_2)$		$p_B(b_m)$

Определение. Условной энтропией величины A при условии, что величина B принимает значение b_j, называется величина

$$H(A|B = b_j) = -\sum_{i=1}^{m} p_{A|B}(a_i|b_j) \cdot \log p_{A|B}(a_i|b_j)$$

Определение. Условной энтропией величины A при условии величины B называется величина

$$H(A|B) = \sum_{j=1}^{n} p_B(b_j) \cdot H(A|B = b_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{AB}(a_i, b_j) \cdot \log p_{A|B}(a_i|b_j)$$

4 Свойства условной энтропии

1. $H(A|B) \geq 0$
2. $H(A|B) = H(A, B) - H(B)$
3. (Правило цепочки)
   $H(A_1, A_2, \dots, A_n) = H(A_1) + H(A_2|A_1) + H(A_3|(A_1, A_2)) + \dots + H(A_n|(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}))$
4. $H(A|B) \leq H(A)$
5. $H(C|(A, B)) \leq H(C|A)$