Дискретные каналы связи

ОПР. Говорят, что задан дискрет. канал связи, если даны два конеч. множ.: $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_q\}$ (входной алфавит) и $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_s\}$ (выходной алфавит),

$\forall\ n = 1, 2, \dots$ определены переходные вероятности:

$$\pi^{(n)}(y_{j_1} \dots y_{j_n} \mid x_{i_1} \dots x_{i_n}) \geq 0 \quad \text{так, что } \forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}):$$

$$\sum_{(y_{j_1} \dots y_{j_n})} \pi^{(n)}(y_{j_1} \dots y_{j_n} \mid x_{i_1} \dots x_{i_n}) = 1$$

Обознач.: $x^n = (x_{i_1} \dots x_{i_n}) \in \mathcal{X}^n$, $y^n = (y_{j_1} \dots y_{j_n}) \in \mathcal{Y}^n$.

Замеч.: $\exists\ U_{1\dots n}$ — распределение на $\mathcal{X}^n$

$$\Downarrow$$

$$V_{1\dots n}(y^n) = \sum_{x^n} U_{1,\dots,n}(x^n) \cdot \pi^{(n)}(y^n \mid x^n)$$

Определим на множ. $\mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ пару случ. векторов (X^n, Y^n) с совместным распределением:

$$P(X^n = x^n, Y^n = y^n) = U_{1\dots n}(x^n) \cdot \pi^{(n)}(y^n \mid x^n) \quad (**)$$

X^n — наз. случайным входным вект. канала; Y^n — случ. выходной вектор. Очевидно, что:

$$\left.\begin{aligned} P(X^n = x^n) &= U_{1\dots n}(x^n) \\ P(Y^n = y^n) &= V_{1\dots n}(y^n) \end{aligned}\right\} \text{ — по обознач. } U, V$$

$$P(Y^n = y^n \mid X^n = x^n) = \pi^{(n)}(y^n \mid x^n) \text{ — следует из } (**)$$

ОПР. Дискрет. канал наз. каналом без памяти, если дана послед. $\pi_1, \pi_2, \dots$ стохастич. матриц размера $q \times s$ и $\forall\ n = 1, 2, \dots$ справедливо:

$$\pi^{(n)}(y^n \mid x^n) = \pi_1(y_{j_1} \mid x_{i_1}) \cdot \pi_2(y_{j_2} \mid x_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \pi_n(y_{j_n} \mid x_{i_n})$$

ОПР. Дискрет. канал без памяти наз. стационарным, если $\pi_1 = \pi_2 = \ldots =$, т.е. переходные вер. не зависят от номера шага.

ОПР. (Модиф.) Канал связи — тройка $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$, где $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_q\}$ — входной алф., $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_s\}$ — выход. алфавит, $\pi = (\pi_{ij}) = (\pi(y_j \mid x_i))$ — стохастич. матрица размера $q \times s$.

случае (стационар. канала без памяти) распред. V задается:

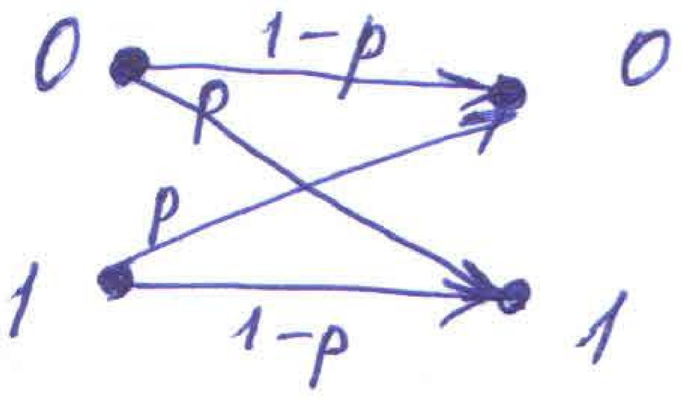
$$V_{1\ldots n}(y^n) = \sum_{x^n} U_{1\ldots n}(x^n)\, \pi_{i_1 j_1} \ldots \pi_{i_n j_n} \qquad (☼)$$

$n=1$: $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_g)$ $\quad \vec{v} = (v_1 \ldots v_s)$,

$$\vec{v} = \vec{u} \cdot \pi \Leftrightarrow v_j = \sum_{i=1}^{g} u_i \pi_{ij}. \quad (j = \overline{1,s})$$

Пример 1. Двоичный симметричный канал с парам. p: ДСК(p)

$\mathcal{X} = \{0;1\}$ $\quad \mathcal{Y} = \{0;1\}$ $\quad \pi = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1 & p & 1-p \end{array}$

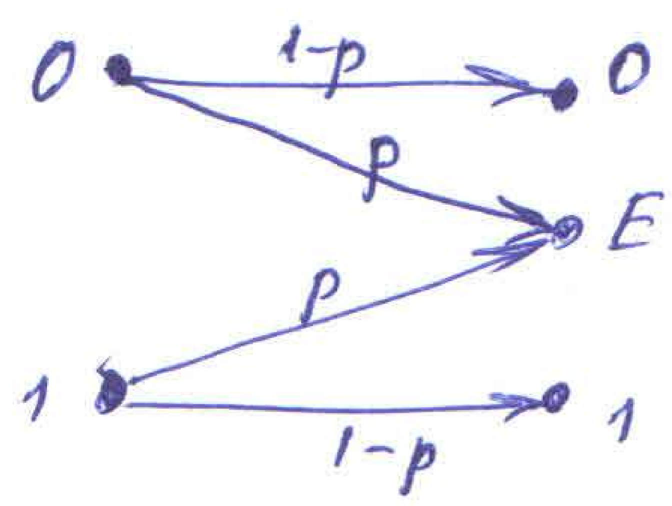


$1-p$ = вер. правильной передачи

p = вер. искажения

Пример 2. Двоичный канал со стиранием с парам. p:

$\mathcal{X} = \{0,1\}$ $\quad \mathcal{Y} = \{0; E; 1\}$ $\quad \pi = \begin{array}{c|ccc} & 0 & E & 1 \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ 1 & 0 & p & 1-p \end{array}$



$1-p$ = вер. правильной передачи

p = вер. стирания.

<u>Опр.</u> $\exists$ $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ – канал связи; на $\mathcal{X}^n$ задано распредел. $U_{1\ldots n}$

Для пары случ. векторов X^n, Y^n определены велич.:

$$H(X^n) = -\sum_{x^n} U_{1\ldots n}(x^n) \cdot \log_2 U_{1\ldots n}(x^n)$$

Энтропия

$$H(Y^n) = -\sum_{y^n} V_{1\ldots n}(y^n) \cdot \log_2 V_{1\ldots n}(y^n)$$

$$H(X^n, Y^n) = -\sum_{x^n, y^n} P(X^n = x_n, Y^n = y_n) \cdot \log_2 P(X^n = x_n, Y^n = y_n)$$ – совмест. энтропия

$$H(Y^n | X^n) = -\sum_{x^n, y^n} P(X^n = x_n, Y^n = y_n) \cdot \log_2 \pi^{(n)}(y^n | x^n) =$$

$$= -\sum_{x^n, y^n} P(X^n = x_n, Y^n = y_n) \cdot \log_2 \pi(y_{j_k} | x_{i_k})$$ – условная энтропия

$$I(X^n; Y^n) = H(Y^n) - H(Y^n | X^n)$$ – взаимная информация.

Пропускной способностью канала связи наз. величина:

$$C^* = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \sup_{\vec{u}_{1\ldots n}} I(X^n; Y^n) \right)$$

↳ все возможные распред. случ. вектора X^n

Грубо: C^* – наибольшее допустимое колич. полезной инф./1 симв., кот. м/б передано по каналу связи от отправителя к получателю.

Точная грань $\sup\limits_{\vec{u}_{1\ldots n}} I(X^n; Y^n)$ достигается на нек. $\vec{u}_{1\ldots n}$, кот. называется оптимальным (для заданного n).

замкнутое огранич. множ. в $\mathbb{R}^{q^n}$

непрерыв.

(П) Теорема. Для стационарного дискретного канала связи без памяти вып.:

$$C^* = \max_{\vec{u}} I(X; Y),$$ где $\vec{u}$ – все возможные распределения $\vec{u}$ на множ. $\mathcal{X}$.

Д-во: [Che, p. 114]

<u>Утв.</u> Пусть задан канал связи $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$ и входное распред. $\vec{u}$ на $\mathcal{X}$. Тогда:

$$I(X; Y) = H\left(\sum_{i=1}^{q} u_i \vec{\pi}_i\right) - \sum_{i=1}^{q} u_i H(\underbrace{\vec{\pi}_i}_{\substack{i\text{-я} \\ \text{строка матрицы } \pi}})$$

Д-во. Строка $\vec{\pi}_i$ матрицы π задает условное распред. выход. символа Y при условии вход. симв. $X = x_i$

$\Rightarrow$ Услов. энтропия имеет вид

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{q} u_i H(Y|X = x_i) = \sum_{i=1}^{q} u_i H(\vec{\pi}_i)$$

По (☆) в случае стац. канала без памяти, распределение выход. симв. $\vec{v} = \vec{u} \cdot \pi = \sum_{i=1}^{q} u_i \cdot \vec{\pi}_i$

$$I(X; Y) = \underbrace{H(Y)}_{\substack{\shortparallel \\ H(\vec{v}) = H\left(\sum_{i=1}^{q} u_i \vec{\pi}_i\right)}} - \underbrace{H(Y|X)}_{\substack{\shortparallel \\ \sum_{i=1}^{q} u_i H(\vec{\pi}_i)}}$$

чтд.

(П) Теорема. Пусть задан канал связи $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \pi)$. Велич. $I(X; Y)$ достигает max. на распред. $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_q) \Leftrightarrow \exists$ число C:

$$\begin{cases} \text{если } u_i > 0, \text{ то } I(x_i; Y) = C \\ \text{если } u_i = 0, \text{ то } I(x_i; Y) \leq C \end{cases}$$

При этом пропускная способность $C^* = C$.