
Практика №13 (25.05.2021)

---

1. Пусть X и Y - дискретные случайные величины, которые принимают значения $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_s)$ соответственно. Пусть $Z = X + Y$.

- Доказать равенство $H(Z|X) = H(Y|X)$. Доказать, что если величины X, Y независимы, то $H(X) \le H(Z)$ и $H(Y) \le H(Z)$. Таким образом, добавление независимой случайной величины увеличивает неопределенность.

- Привести пример случайных величин, для которых $H(X) > H(Z)$ и $H(Y) > H(Z)$ (в силу п.1, X, Y должны быть зависимы).

- В каком случае выполняется равенство $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

2. Мировая серия по бейсболу состоит из (максимум) семи раундов, каждый из которых заканчивается победой одной из команд A или B. Победитель определяется по достижении им четырех побед, при этом соревнование прерывается. Пусть X - случайная величина, представляющая исход мировой серии между командами A и B. Она может принимать значения, например, $AAAA$, $BABABAB$, $BBBAAAA$. Пусть Y - случайная величина, принимающая в качестве значения число раундов, сыгранных в мировой серии $(4, 5, 6, 7)$. Считая команды A и B равноправными, сыгранные раунды - независимыми, вычислите $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$.

3. Пусть $A = \sum_{n=2}^{\infty}(n \log^2 n)^{-1}$ - сходящийся числовой ряд. Доказать, что целочисленная случайная величина X, заданная функцией вероятности $P(X = n) = (An \log^2 n)^{-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$ имеет бесконечную энтропию $H(X) = +\infty$

4. Доказать неравенство

$$H(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \le H(p_1, \dots, \frac{p_i + p_j}{2}, \dots, \frac{p_j + p_i}{2}, \dots)$$

. Таким образом, любое изменение функции вероятностей, которое делает распределение "более равномерным увеличивает энтропию.

5. Имеется канал связи над двоичным алфавитом, на входе и выходе которого поступают биграммы (блоки по два символа $0, 1$). Передача по каналу связи осуществляется в соответствии с отображением: 00 $\rightarrow$ 01, 01 $\rightarrow$ 10, 10 $\rightarrow$ 11, 11 $\rightarrow$ 00. Если, к примеру, на вход подается 00, на выходе канала связи имеем 01 с вероятностью 1. Обозначим X_1X_2 - случайные символы на входе канала связи, $Y1Y_2$ - случайные символы на выходе канала связи.

- Вычислить взаимную информацию $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ как функцию от входного распределения $p = p_1, p_2, p_3, p_4$ четырех возможных входных пар $00, 01, 10, 11$.

- Вычислить пропускную способность канала.

- Показать, что при входном распределении p, на котором достигается пропускная способность канала, $I(X_1, Y_1) = 0$, т.е. взаимная информация отдельно взятых символов входа и выхода не обязательно оказывается максимальной.