1

<u>Утв.</u> Марк. источн. $(\mathcal{A}, \vec{p}, Q)$ - стац. $\Leftrightarrow$ $\vec{p} \cdot Q = \vec{p}$

<u>Д-во.</u>] ДИС стац. $\Rightarrow$ $P_1(a_j) = P_2(a_j)$ по опред. стац. для $\mathcal{B} = \{a_j\}$, $k = n_1 = t = 1$

$$P_1(a_j) = p_j$$

$$P_2(a_j) = \sum_{a_i \in \mathcal{A}} P_{1,2}(a_i, a_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}}_{\text{букв } m \text{ штук}} p_i q_{ij}$$

. Так, $\vec{p}Q = \vec{p}$, чтд

Обратно:] $\vec{p}Q = \vec{p}$.

Проверим, что $\forall (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ вып. : $P_{n_1, \dots, n_k}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = P_{n_1+1 \dots n_k+1}(a_{i_1} \dots a_{i_k})$

$$P_{n_1 \dots n_k}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \sum_{\substack{(y_1 y_2 \dots y_{n_k}) \in \mathcal{A}^{n_k} \\ y_{n_1} = a_{i_1}, \dots, y_{n_k} = a_{i_k}}} P_{1,2,\dots,n_1,\dots,n_k}(y_1 y_2, \dots, y_{n_1}, \dots, y_{n_k}).$$

Рассмотрим одно слагаемое:

$$\underbrace{P_{1,2,\dots,n_1,\dots,n_k}(y_1 y_2, \dots, y_{n_1}, \dots, y_{n_k})}_{= \underbrace{p(y_1)}_{= \sum_{i=1}^{m} p(a_i) q(a_i y_1)} \cdot q(y_1 y_2) \cdot \dots} = \sum_{a_i \in \mathcal{A}} P_{1,2,\dots,n_1+1,\dots,n_k+1}(a_i, y_1 y_2, \dots, y_{n_1}, \dots, y_{n_k})$$

Подставляем в первую сумму:

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \sum_{\substack{(a_i, y_1, y_2, \dots, y_{n_k}) \in \mathcal{A}^{n_k+1} \\ y_{n_1} = a_{i_1} \dots y_{n_k} = a_{i_k}}} P_{1,2,\dots,n_1+1,\dots,n_k+1}(a_i, y_1 y_2 \dots, y_{n_1} \dots, y_{n_k}) =$$

$$= P_{n_1+1, \dots, n_k+1}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}).$$

<u>чтд.</u>

<u>ОПР.</u>] Задан ДИС $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ или дискрет. случ. проц. $A = (A_1, A_2, \dots)$

Энтропией на одну букву k-буквенного сообщ. A^k наз. величина $H_k = \frac{1}{k} H(A^k)$

Условной энтропией k-й буквы A_k $(k > 1)$ при условии предшеств. букв $A^{k-1} = (A_1, \dots, A_{k-1})$ наз. величина $H^{(k)} = H(A_k \mid A^{k-1})$

Полагаем по опред. $H^{(1)} = H_1$.

Замеч. Вычисл. формулы:

$$H_k = -\frac{1}{k} \cdot \sum_{(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \in \mathcal{A}^k} P_{1,\dots,k}(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \cdot \log_2 P_{1,\dots,k}(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$$

$$H^{(k)} = -\sum_{(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \in \mathcal{A}^k} P_{1,\dots,k}(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \cdot \log_2 P\left(A_k = a_{i_k} \,\middle|\, A^{k-1} = (a_{i_1},\dots,a_{i_{k-1}})\right).$$

Утв. $H^{(k)} = kH_k - (k-1)H_{k-1}$, $k > 1$

$$H_k = \frac{1}{k}\left(H^{(1)} + H^{(2)} + \dots + H^{(k)}\right)$$

Д-во (1): $H^{(k)} \underset{\text{опр.}}{=} H(A_k | A^{k-1}) =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{адитив. энтропии:} \\ \underbrace{H(A_k, A^{k-1})}_{H(A^k)} = H(A^{k-1}) + H(A_k | A^{k-1}) \end{array} \right\} =$$

$$= H(A^k) - H(A^{k-1}) = kH_k - (k-1)H_{k-1} \quad \text{чтд.}$$

Д-во (2): $kH_k = H(A^k) \underset{\text{правило цеп.}}{=} H(A_1) + H(A_2 | A^1) + \dots + H(A_k | A^{k-1}) =$

$$= H^{(1)} + H^{(2)} + \dots + H^{(k)}.$$

ОПР. Энтропией источника сообщений наз. предел

$$H_\infty := \lim_{k \to \infty} H_k, \text{ если он } \exists \text{ и конечен.}$$

H_∞ – мера колич. инф., прих. в среднем на 1 символ длинного сообщения, иногда наз. скоростью порождения инф. ДИС.

Оценка сверху:

$$H_k = \frac{1}{k} H(A^k) \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} H(A_i) \le \log_2 m$$

$\Rightarrow$ $H_\infty \le \log_2 m$, если H_∞ $\exists$.

При этом $H_\infty = \log_2 m$ (max), если все A_i независ. и равномерно распределены.

(П) Если ДИС стационарен, то обе послед. H_k и $H^{(k)}$ не возрастают и сходятся к конечному пределу H_∞.

Д-во. $H^{(k)} = H(A_k | A_1, \dots, A_{k-1}) \le H(A_k | A_2, A_3, \dots, A_{k-1}) =$

$\{ H(B|A,C) \le H(B|C) \}$

$\underset{\text{ДИС стац.}}{=} H(A_{k-1} | A_1, A_2, \dots, A_{k-2}) = H^{(k-1)}$

$\Rightarrow \quad 0 \le H^{(k)} \le H^{(k-1)}$

неотриц. послед. невозраст. $\Rightarrow$ сх-ся к конеч. lim.

Применим ф-лу (2) из утвержд.:

$$H_k - H_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} H^{(i)} - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} H^{(i)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k} H^{(i)} - \frac{1}{k+1} H^{(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}\left(\sum_{i=1}^{k} H^{(i)} - k H^{(k+1)}\right) = \frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\left(H^{(i)} - H^{(k+1)}\right) \ge 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \le H_{k+1} \le H_k}$$

$$\lim_{k\to\infty} H_k = \lim_{k\to\infty} H^{(k)}.$$

Лемма. Если для числовой послед. x_n, $n = 1, 2, \dots$ $\exists$ конеч. предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, то послед. сред. арифм. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ также сходится к x.

(П) Для стационар. Марк. источника с глубиной зависимости $s \ge 1$:

$$H^{(1)} \ge H^{(2)} \ge \dots \ge H^{(s)} \ge H^{(s+1)} = H^{(s+2)} = \dots = H_\infty.$$

A_{s+t} – при условии фикс. $A_{s+t-1}, \dots, A_t$, не завис. от $A_1, A_2, \dots, A_{t-1}$, поэтому

$$H^{(s+t)} = H(A_{s+t} | A_1, A_2, \dots, A_{t-1}, \underline{A_t, A_{t+1}, \dots, A_{t+s-1}}) =$$

$$= H(A_{s+t} | A_t, A_{t+1}, \dots, A_{t+s-1}) =$$

$$= H(A_{s+1} | A_1, \dots, A_s) = H^{(s+1)}$$